- Nombres premiers
- Décomposition en produit de facteurs premiers
- Fractions irréductibles

I. Nombres premiers

Définition

On dit qu'un nombre entier est **un nombre premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple

$13 = 1 \times 13$.
13 n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même. 13 est un nombre premier.

6 n'est pas un nombre premier, car il est divisible par 1 ; 2 ; 3 et 6.

Le début de la liste des nombres premiers est : 2 ; 3 ; 5 ; 7 …
1 n'est pas un nombre premier.

Crible d'Eratosthène

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

II. Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème (admis)

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple

$10 = 2 \times 5$ $\quad 18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$ $\quad 46 = 2 \times 23$

Méthode

$105 = 3 \times 35$

$105 = 3 \times 5 \times 7$

$12\,250 = 2 \times 6\,125$

$12\,250 = 2 \times 5 \times 1\,225$

$12\,250 = 2 \times 5 \times 5 \times 245$

$12\,250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 49$

$12\,250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$

$12\,250 = 2 \times 5^3 \times 7^2$

III. Fraction irréductibles

Définition

Une fraction est **irréductible** lorsqu'elle n'est plus simplifiable.

Rendre une fraction irréductible

Énoncé

Rendre la fraction $\frac{280}{448}$ irréductible.

Correction

On commence par décomposer 280 et 448 en facteurs premiers.

$280 = 2^3 \times 5 \times 7$ et $448 = 2^6 \times 7$

$$\frac{280}{448} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7}$$

$$\frac{280}{448} = \frac{5}{2 \times 2 \times 2}$$

$$\frac{280}{448} = \frac{5}{8}$$

Remarques

La fraction a été simplifiée par le plus grand diviseur commun de 280 et 448 : $2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

Lorsqu'une fraction est irréductible, le numérateur et le dénominateur ont un seul diviseur commun : 1.

IV. Plus petit multiple commun

1/méthode

Recherche du plus petit multiple commun de 18 et 28

$18 = 2 \times 3 \times 3$ et $28 = 2 \times 2 \times 7$

Le plus petit multiple commun de 28 et 36 est :

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 =$$

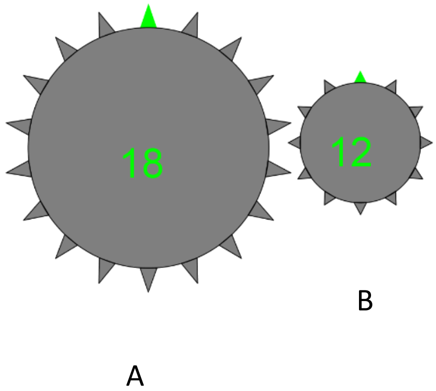
Permet de résoudre des exercices type engrenages, coïncidence et de conjonction de phénomènes.

2/ Application

Deux roues d'engrenage A et B sont en contact.

La roue A possède 18 dents et la roue B comporte 12 dents.

Au bout de combien de tours de chacune de ces roues seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?



La roue A fera un tour à chaque multiple de **18** dents, la seconde à chaque multiple de **12** dents.
Elles reviendront en position initiale à chaque multiple commun de **18** et de **12**.
Pour trouver le nombre de dents avant de revenir pour la première fois en position initiale, on cherche le plus petit multiple commun de 18 et 12.

Le nombre total de dents cherché est le plus petit multiple commun de 12 et 18.

$12 = 2 \times 2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3 \times 3$ donc le plus petit multiple commun de 12 et 18 est :

$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$.

Comme :

$36 = 18 \times 2$ et $36 = 12 \times 3$

alors, les deux roues reviennent dans leur position initiale pour la première fois quand la roue A fait 2 tours et la roue B fait 3 tours.

IV. Plus grand diviseur commun de deux nombres.

a) Méthode

Recherche du plus grand diviseur commun de 24 et 36.

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ et $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ donc le plus grand diviseur commun de 24 et 36 est : $2 \times 2 \times 3 = 12$.

b) Application

Un fleuriste dispose de 170 iris et de 102 roses.
Il veut, en utilisant toutes ses fleurs, réaliser un maximum de bouquets contenant tous le même nombre d'iris et le même nombre de roses.

a) Quel est le nombre maximal de bouquets ?

b) Quel est le nombre d'iris dans chaque bouquet ?
Quel est le nombre de roses dans chaque bouquet ?

a) Le nombre maximal de bouquet est le plus grand diviseur commun de 170 et 102

$170 = 2 \times 5 \times 17$ et $102 = 2 \times 3 \times 17$

Donc, le plus grand diviseur commun de 170 et 102 est : $2 \times 17 = 34$

Par conséquent, le fleuriste peut faire au maximum 34 bouquets.

b) $170 = 5 \times 34$ et $102 = 3 \times 34$.

Donc dans chaque bouquet, il y a 5 iris et 3 roses.

Un fleuriste dispose de 170 iris et de 102 roses.
Il veut, en utilisant toutes ses fleurs, réaliser un maximum de bouquets contenant tous le même nombre d'iris et le même nombre de roses.

a) Quel est le nombre maximal de bouquets ?

b) Quel est le nombre d'iris dans chaque bouquet ?
Quel est le nombre de roses dans chaque bouquet ?

Un fleuriste dispose de 170 iris et de 102 roses.
Il veut, en utilisant toutes ses fleurs, réaliser un maximum de bouquets contenant tous le même nombre d'iris et le même nombre de roses.

a) Quel est le nombre maximal de bouquets ?

b) Quel est le nombre d'iris dans chaque bouquet ?
Quel est le nombre de roses dans chaque bouquet ?

Un fleuriste dispose de 170 iris et de 102 roses.
Il veut, en utilisant toutes ses fleurs, réaliser un maximum de bouquets contenant tous le même nombre d'iris et le même nombre de roses.

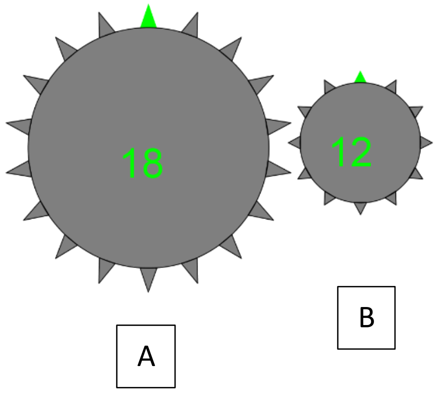
a) Quel est le nombre maximal de bouquets ?

b) Quel est le nombre d'iris dans chaque bouquet ?
Quel est le nombre de roses dans chaque bouquet ?

2/ Application

Deux roues d'engrenage A et B sont en contact.

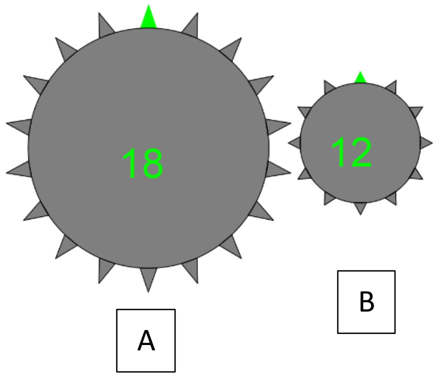
Au bout de combien de tours de chacune de ces roues seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?



2/ Application

Deux roues d'engrenage A et B sont en contact.

Au bout de combien de tours de chacune de ces roues seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?



2/ Application

Deux roues d'engrenage A et B sont en contact.

Au bout de combien de tours de chacune de ces roues seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?