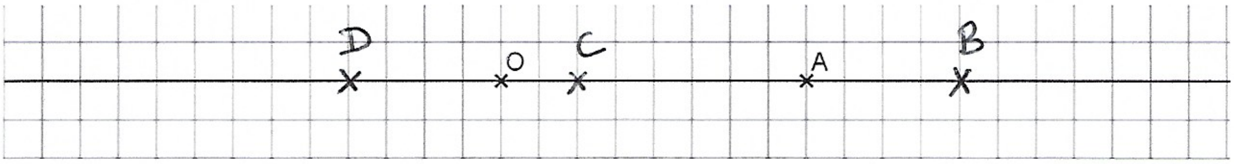
I. Homothétie.

Soit un point O et k ($k \neq 0$) un nombre décimal.

Appliquer une homothétie de centre O et de rapport k à un point, consiste à multiplier la distance entre O et ce point par k (ou l'opposé de k lorsque k est négatif).

Exemples



B est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 1,5.

$B \in [OA)$ et $OB = 1,5 \times OA = 6$ cm.

C est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 0,25 ou $\frac{1}{4}$.

$C \in [OA)$ et $OC = 0,25 \times OA = 0,25 \times 4 = 1$ cm

D est l'image de A par l'homothétie de centre o et de rapport $-0,5$.

$D \notin [OA)$ et $OD = 0,5 \times OA = 0,5 \times 4 = 2$ cm

II. Construction de l'image d'une figure par une homothétie.

a/ Homothétie de centre O et de rapport 2.

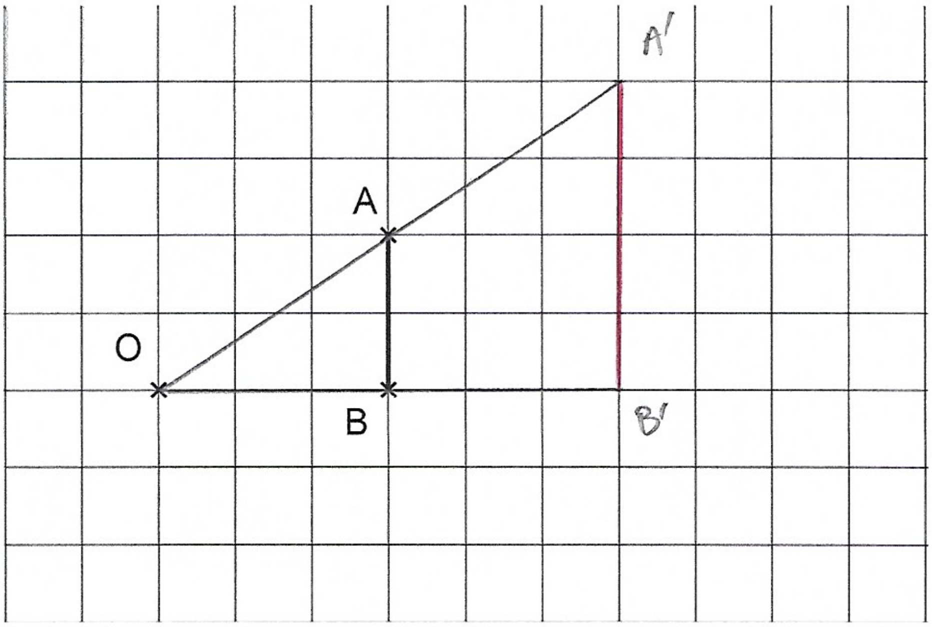
Construire l'image [A'B'] du segment [AB] par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

$OA' = 2 \times OA$ et $A' \in [OA)$
$OB' = 2 \times OB$ et $B' \in [OB)$

Remarques

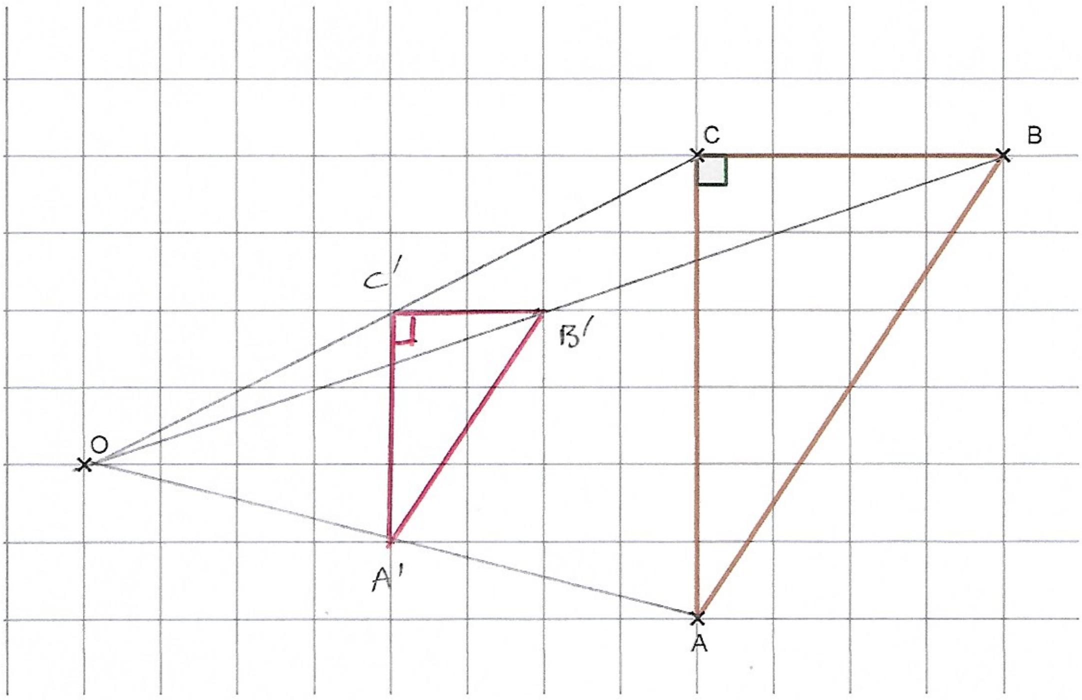
* $A'B' = 2 \times AB$
[A'B'] est un agrandissement de [AB] de rapport 2.

* $(A'B') // (AB)$



b/ Homothétie de centre O et de rapport 0,5.

Construire l'image A'B'C' du triangle ABC] par l'homothétie de centre O et de rapport 0,5.



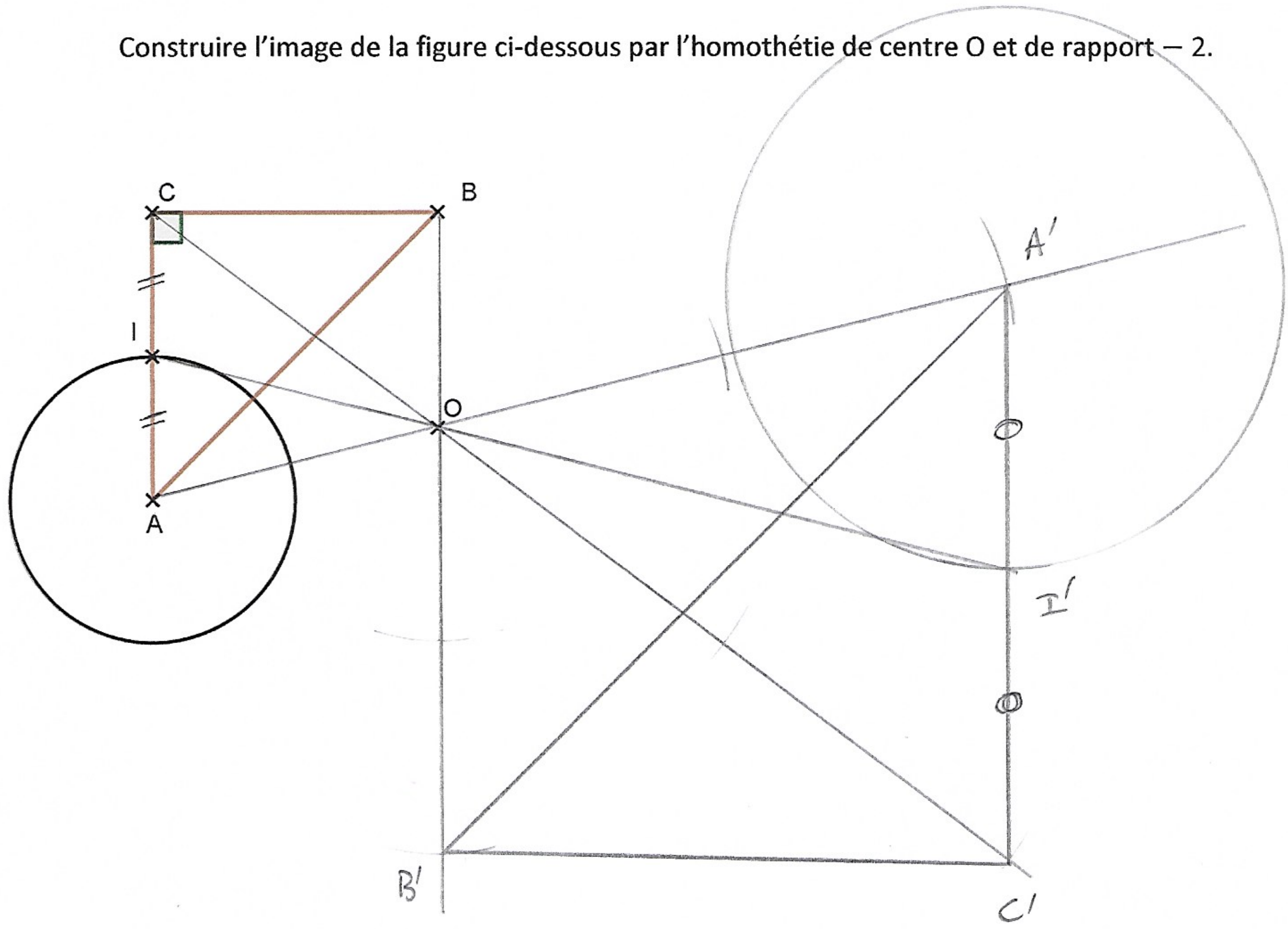
Remarques

* A'B'C' est aussi un triangle rectangle
⟹ - l'homothétie conserve la nature des figures
 - des mesures des angles sont conservées

* $0,5 < 1$
A'B'C' est une réduction de ABC de rapport 0,5

c/ Homothétie de centre O et de rapport − 2.

Construire l'image de la figure ci-dessous par l'homothétie de centre O et de rapport − 2.



III. Propriétés et remarques

Remarques et propriétés

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle.
- L'homothétie conserve la mesure des angles, le parallélisme, la perpendicularité.
- Dans une homothétie de rapport k (k non nul), les longueurs (ou les dimensions) d'une figure sont multipliées par k ou par l'opposé de k si $k < 0$.
- Une homothétie de rapport k est une réduction si $-1 < k < 1$
- Une homothétie de rapport k est un agrandissement si $k > 1$ ou $k < -1$.
- Si $k = 1$, la figure est invariante.
- Si $k = -1$, l'homothétie est une symétrie centrale.

III. Agrandissement et réduction

Définition

Une figure F’ est un agrandissement, ou une réduction d’une figure F lorsque toutes les longueurs de F’ s’obtiennent en multipliant celles de la figure F par un même nombre k.

- F’ est **un agrandissement** de F si k > 1 ;
- F’ est **une réduction** de F si k < 1.

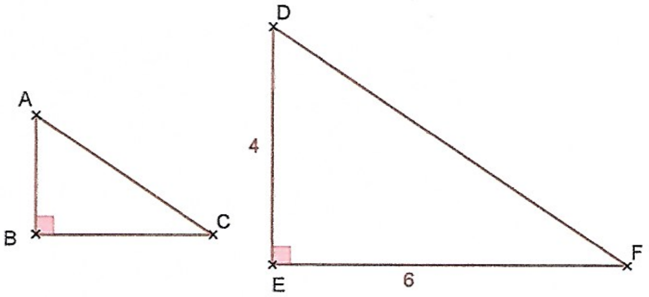
Le nombre k est le **rapport d’agrandissement ou de réduction.**

Propriété 1

Dans un agrandissement ou une réduction, les mesures des angles, la perpendicularité et le parallélisme sont conservés

Propriétés 2 et 3

Quand on agrandit ou réduit une figure, si les dimensions sont multipliées par k, alors l’aire est multipliée par k^2.



ABC est une réduction de rapport 0,5 de DEF.

$\mathcal{A}_{DEF} = \frac{EF \times DE}{2} = \frac{4 \times 6}{2} = 12 \text{ cm}^2$

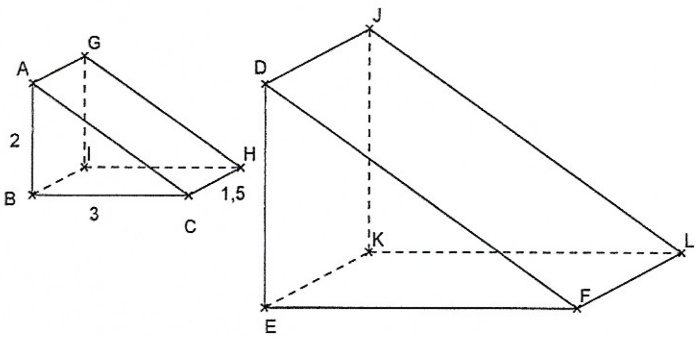
$\mathcal{A}_{ABC} = 0,5^2 \times \mathcal{A}_{DEF} = 0,25 \times 12$

$\mathcal{A}_{ABC} = 3 \text{ cm}^2$

Quand on agrandit ou réduit un solide, si les dimensions sont multipliées par k, alors le volume est multiplié par k^3.

Le prisme droit DEFLKJ est un agrandissement de rapport 2 du prisme ABCGIH.

$\mathcal{V}_1 = \mathcal{A}_{ABC} \times CH = 3 \times 1,5 = 4,5 \text{ cm}^3$



$\mathcal{V}_2 = 2^3 \times \mathcal{V}_1$

$= 8 \times 4,5$

$\mathcal{V}_2 = 36 \text{ cm}^3$