

Triangles semblables

I. Des triangles semblables

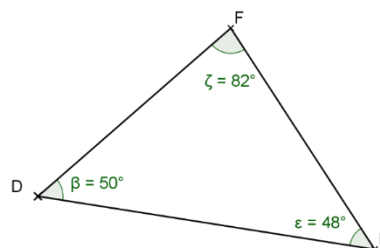
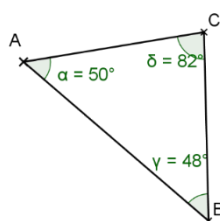
Définition

Deux triangles qui ont leurs angles deux à deux égaux sont appelés des triangles semblables. Ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Vocabulaire

Lorsque deux triangles sont semblables :

- Un angle d'un triangle et l'angle de même mesure de l'autre triangle sont dits **angles homologues**.
- Les sommets de deux angles homologues sont dits **sommets homologues**.
- Deux côtés opposés de deux angles homologues sont aussi dits **côtés homologues**.



Angles homologues	Sommets homologues	Cotés homologues
$\widehat{CAB}$ et $\widehat{FDE}$	A et D	$[CB]$ et $[FE]$
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$	B et E	$[AB]$ et $[DE]$
$\widehat{ACB}$ et $\widehat{DFE}$	C et F	$[AB]$ et $[DE]$

Remarque :

- Si deux triangles sont égaux alors ils sont semblables.
- Deux triangles semblables ne sont pas forcément égaux.

Triangles semblables

II. Triangles semblables et longueurs

Propriété : côtés proportionnels

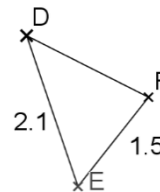
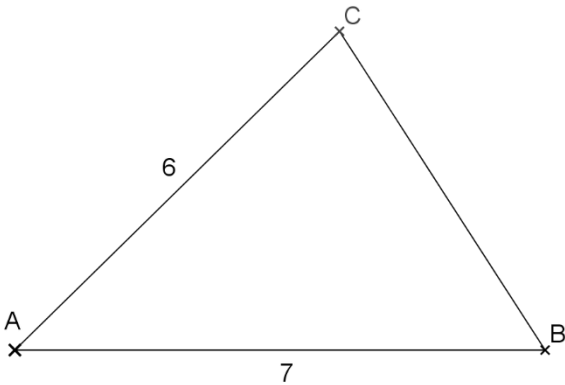
Si deux triangles ABC et EDF sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Si les sommets A, B et C sont homologues respectivement aux sommets D, E et F, on a :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Exemple

Les triangles ABC et DEF sont semblables. A, B et C sont homologues respectivement à D, E et F. On veut calculer les longueurs manquantes.



Sommets homologues	Cotés homologues
A et D	[BC] et [EF]
B et E	[AC] et [DF]
C et F	[AB] et [DE]

Les triangles ABC et DEF sont semblables donc les longueurs des côtés homologues' sont proportionnelles, donc :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} \quad \text{soit} \quad \frac{2,1}{7} = \frac{DF}{6} = \frac{1,5}{BC}$$

Calcul de DF.

$$\text{Avec } \frac{2,1}{7} = \frac{DF}{6},$$

$$\text{on en déduit } DF = \frac{2,1 \times 6}{7}$$

$$\text{Soit } DF = 1,8 \text{ cm}$$

Calcul de CB

$$\text{Avec } \frac{2,1}{7} = \frac{1,5}{BC},$$

$$\text{on en déduit } BC = \frac{1,5 \times 7}{2,1}$$

$$\text{Soit } BC = 5 \text{ cm}$$

Triangles semblables

III. Déterminer si deux triangles sont semblables

b/ Avec leurs angles

Propriété

Si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.

Autrement dit

Il suffit que deux angles d'un triangle soient égaux à deux angles d'un autre triangle pour dire que ces deux triangles sont semblables.

b/ Avec les longueurs des côtés

Propriété

Si les longueurs d'un triangle sont proportionnelles aux longueurs d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables.

Exemple

Pour montrer que les deux triangles suivants sont semblables, il faut déterminer les paires de côtés homologues en les rangeant dans l'ordre croissant de leur longueur.

Pour le triangle ABC : $BC < AB < AC$

Pour le triangle DEF : $EF < DE < DF$

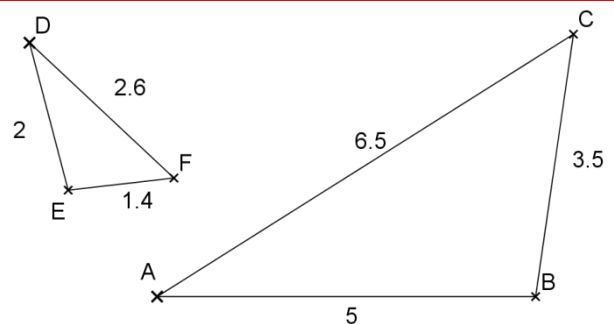
On calcule les quotients et on vérifie s'ils sont égaux.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{DF}{AC} = \frac{2,6}{3,5} = 0,4$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{1,4}{3,5} = 0,4$$

Donc, les quotients sont égaux.



Par conséquent, les longueurs de ABC sont proportionnelles aux longueurs de DEF, alors les triangles ABC et DEF sont semblables.

Triangles semblables

c/ Avec un angle et deux côtés

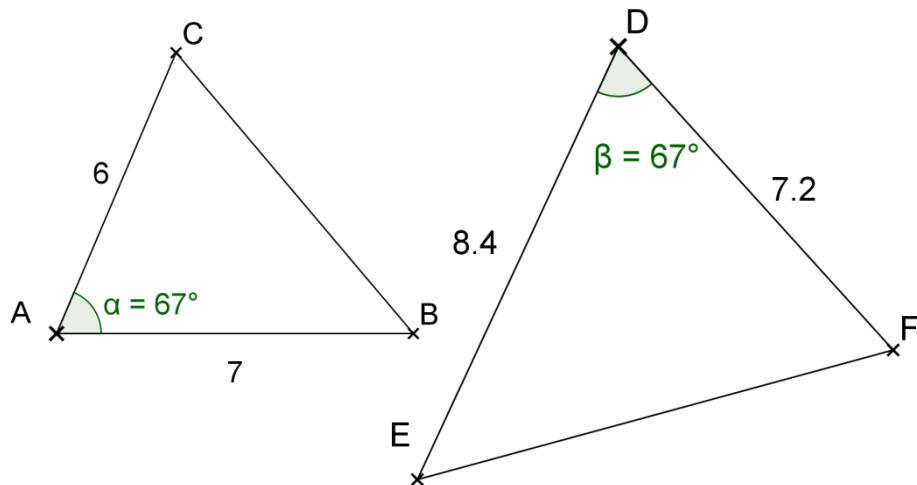
Propriété

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés dont les longueurs sont proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

Exemple

$$\frac{DE}{AB} = \frac{8,4}{7} = 1,2$$

$$\frac{DF}{AC} = \frac{7,2}{6} = 1,2$$



Comme $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et que les longueurs AB et AC sont proportionnelles aux longueurs DE et DF, alors les triangles ABC et DEF sont semblables.