I. Homothétie.

Définition

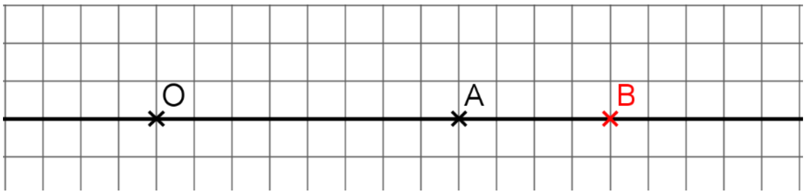
Soit un point O et k $(k \neq 0)$ un nombre décimal.

Appliquer une homothétie de centre O et de rapport k à un point, consiste **à multiplier la distance entre O et ce point par $\boldsymbol{k}$** (ou l'opposé de k lorsque k est négatif).

Exemples

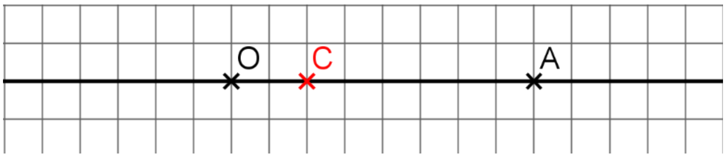
B est l'image de A par **l'homothétie** de **centre O** et de **rapport 1,5**.

$\boldsymbol{B \in [OA)}$ **et** $\boldsymbol{OB = 1,5 \times OA = 1,5 \times 4 = 6\ cm}$



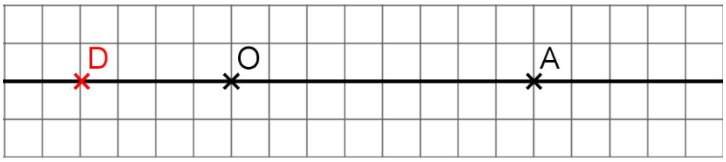
C est l'image de A par **l'homothétie** de **centre O** et de **rapport 0,25 ou $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$**.

$\boldsymbol{C \in [OA)}$ **et** $\boldsymbol{OC = 0,25 \times OA = 0,25 \times 4 = 1\ cm}$



D est l'image de A par l'homothétie de centre o et de rapport $-0{,}5$.

$\boldsymbol{D \in (OA)}$ **mais** $\boldsymbol{D \notin [OA)}$ **et** $\boldsymbol{OD = 0,5 \times OA = 0,5 \times 4 = 2\ cm}$



II. Construction de l'image d'une figure par une homothétie.

a/ Homothétie de centre O et de rapport 2.

Construire l'image $[A'B']$ du segment $[AB]$ par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

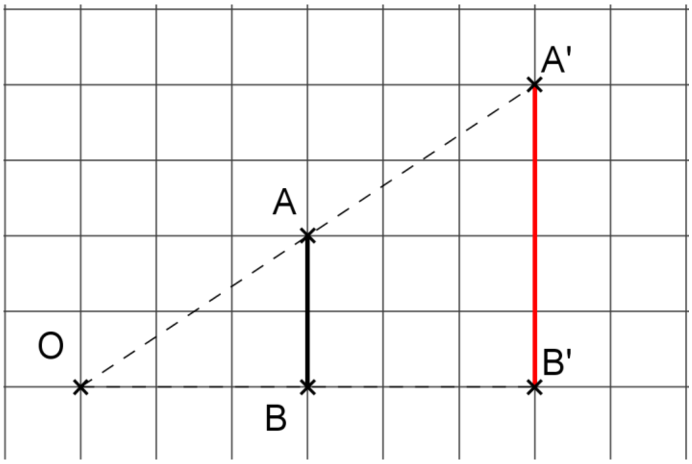
$A' \in [OA)$ et $OA' = 2 \times OA$

$B' \in [OB)$ et $OB' = 2 \times OB$

Remarques

$A'B' = 2 \times AB$ et $(AB)//(A'B')$

$[A'B']$ est un agrandissement de $[AB]$ de rapport 2.



b/ Homothétie de centre O et de rapport 0,5.

Construire l'image $A'B'C'$ du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 0,5.

$A' \in [OA)$ et $OA' = 0{,}5 \times OA$

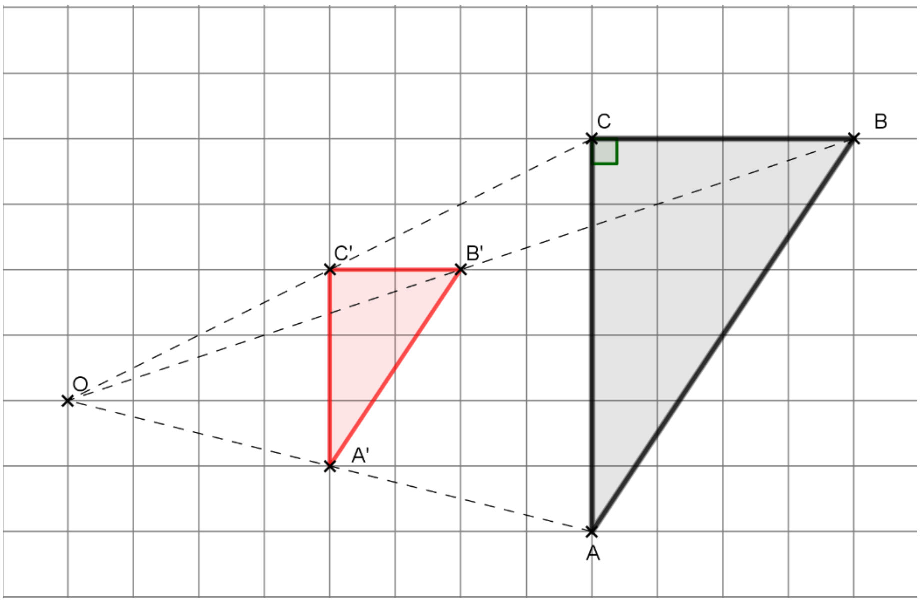
$B' \in [OB)$ et $OB' = 0{,}5 \times OB$

$C' \in [OA)$ et $OC' = 0{,}5 \times OC$

Remarques

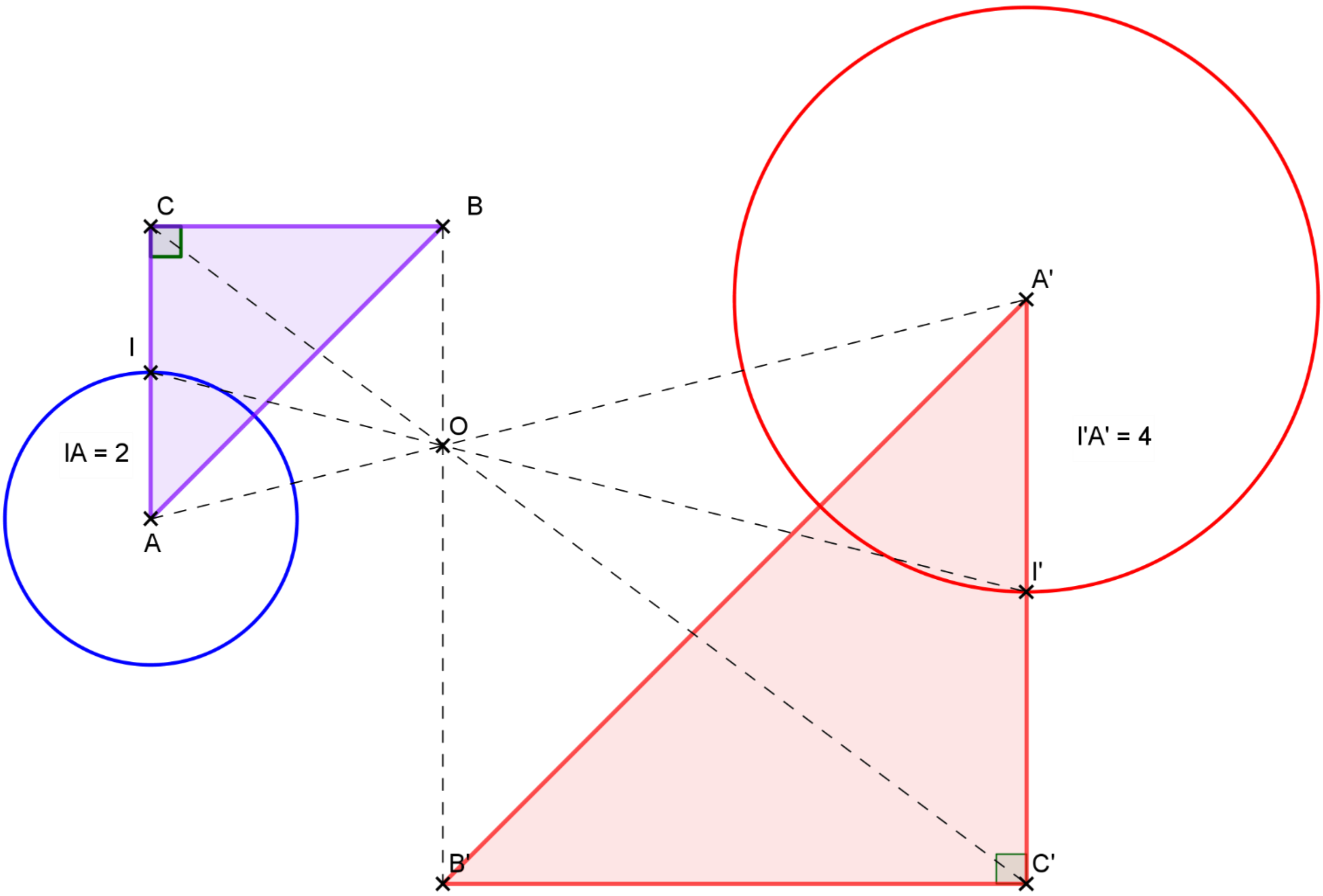
Le triangle $A'B'C'$ est une réduction du triangle ABC de rapport 0,5

Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont la même nature.



c/ Homothétie de centre O et de rapport − 2.

Construire l'image de la figure ci-dessous par l'homothétie de centre O et de rapport − 2.



$A' \in (OA) et\ A' \notin [OA]$ et $OA' = 2 \times OA$

$B' \in (OB) et\ B' \notin [OB]$ et $OB' = 2 \times OB$

$C' \in (OC) et\ C' \notin [OC]$ et $OC' = 2 \times OC$

Remarques

I est le milieu de $[AC]$ donc son image par l'homothétie de centre O est le milieu du segment $[A'C']$.

Le rayon du cercle est multiplié par 2.

La figure image est un agrandissement de la figure initiale de rapport 2 (et non de rapport – 2)

III. Propriétés et remarques

Remarques et propriétés

- L'image d'une droite par une homothétie est **une droite parallèle**.

- L'homothétie conserve **la mesure des angles**, le parallélisme, la perpendicularité.

- Dans une homothétie de rapport k (k non nul), les longueurs (ou les dimensions) d'une figure sont **multipliées** par k ou par l'opposé de k si $k < 0$.

- Une homothétie de rapport k est une **réduction si $-1 < k < 1$**

- Une homothétie de rapport k est **un agrandissement si $k > 1$ ou $k < -1$**.

- Si $k = 1$, la figure est **invariante**.

- Si $\boldsymbol{k = -1}$, l'homothétie est **une symétrie centrale**.