I. Fonction linéaire

1) Proportionnalité et fonction linéaire

Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en **multipliant** les valeurs de l'autre **par un même nombre non nul.**

Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

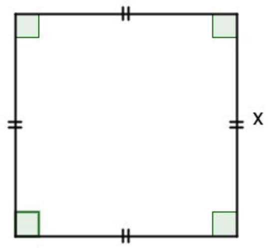
Chaque situation de proportionnalité peut être **modélisé** par **une fonction** f définie par :

$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{ax}$ où a est le coefficient de proportionnalité.

Exemple :

On considère le carré de côté x ci-contre.

Le périmètre du carré est proportionnel à la longueur de son côté et le coefficient de proportionnalité est 4 :



Longueur du côté (en cm)	2	6	9
Périmètre (en cm)	8	24	36

La fonction P qui modélise cette situation de proportionnalité est définie par :

$P(x) = 4x$ ou $P : x \longmapsto 4x$

2) Définition

Etant donné un nombre $\boldsymbol{a}$, la fonction $\boldsymbol{f}$ qui à tout nombre $\boldsymbol{x}$ fait correspondre **le produit de $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{a}$,** est une **fonction linéaire de coefficient $\boldsymbol{a}$** et on note : $\boldsymbol{f(x) = a\,x}$.

Le nombre $\boldsymbol{a}$ est appelé **le coefficient de linéarité** de la fonction linéaire.

Exemple 1 :

$f(x) = 3x$ est la fonction linéaire de coefficient 3.

x	-5	0	1	2
$f(x)$	-15	0	3	6

$\times\ 3$

Exemple 2 :

$f(x) = -2x$ est la fonction linéaire de coefficient -2.

x	-5	0	1	2
$f(x)$	-10	0	-2	-4

$\times\ -2$

Ces deux tableaux de valeurs sont des tableaux de proportionnalité.

II. Ce qu'il faut savoir faire

1/ Calculer une image avec une fonction linéaire.

Soit *f* la fonction linéaire de coefficient de linéarité – 4,5.

$f : x \longmapsto -4{,}5x$ ou $f\,(x) = -4{,}5x$.

Calculer l'image de 9 par f puis celle de -6 par f.

On multiplie par le coefficient de la fonction linéaire

Calcul de l'image de 9, par la fonction f.

On remplace x par 9 et on effectue le calcul.

$f(9) = -4{,}5 \times 9 = -40{,}5$

Calcul de l'image de -6, par la fonction f.

$f(-6) = -4{,}5 \times (-6) = 27.$

2/ Calculer les antécédents par une fonction linéaire.

Soit *g* la fonction linéaire définie par $g(x) = 5x$.

Calculer les antécédents de -36 par la fonction g.

On cherche les nombres x tels que : $g(x) = -36$.

Ce sont les nombres qui sont les solutions de l'équation :

On divise par le coefficient de la fonction linéaire

$5x = -36$

$$x = \frac{-36}{5}$$

$x = -7{,}2.$

L'antécédent de – 36 par la fonction g est – 7,2.

3/ Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire.

Soit *h* la fonction linéaire telle que *h*(8) = – 5,6.

Déterminer l'expression algébrique de la fonction linéaire *h*.

h est une fonction linéaire donc il existe un nombre a tel que $h(x) = ax$.

Comme $h(8) = -5{,}6$ alors $a \times 8 = -5{,}6$.

Donc $a = \frac{-5{,}6}{8} = -0{,}7$.

Par conséquent, $h(x) = -0{,}7x$.

III. Représentation graphique

Définition :

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire $x : \longmapsto \boldsymbol{a}x$ est une **droite passant par l'origine du repère**.

Inversement, dans un repère, toute droite non verticale passant par l'origine est la représentation graphique d'une fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$.

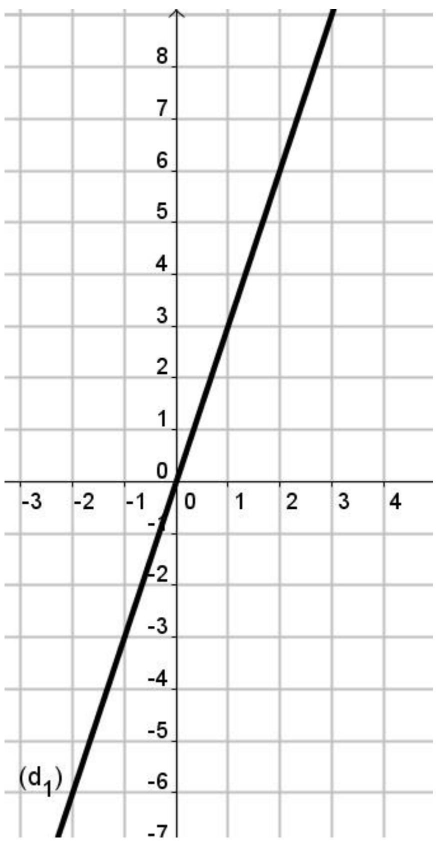
On dit que cette droite a pour **équation** l'égalité $\boldsymbol{y = ax}$ et $\boldsymbol{a}$ est appelé **le coefficient directeur ou la pente** de la droite.

Exemples :

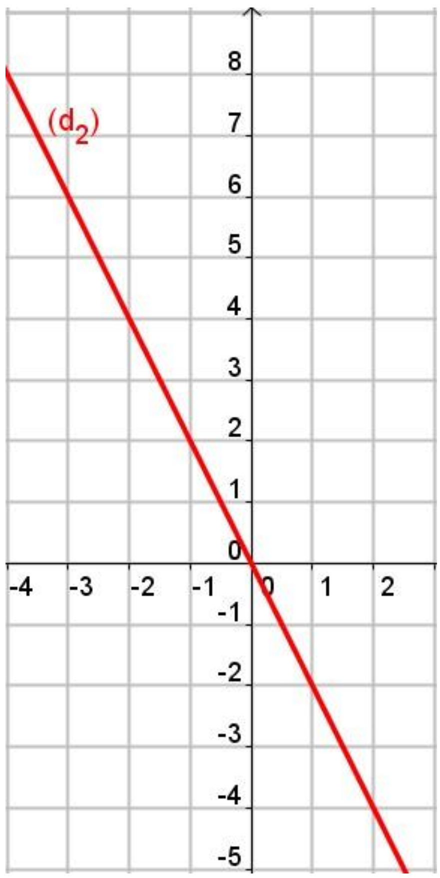
On reprend les exemples 1 et 2.

On appellera (d_1) la droite représentant la fonction linéaire $f(x) = 3x$ et (d_2) la droite représentant la fonction linéaire $f(x) = -2x$.

Exemple 1 : cas où $a > 0$



Exemple 2 : cas où $a < 0$



Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Soit t la fonction linéaire tel que $r : x \longmapsto -0.5x$.

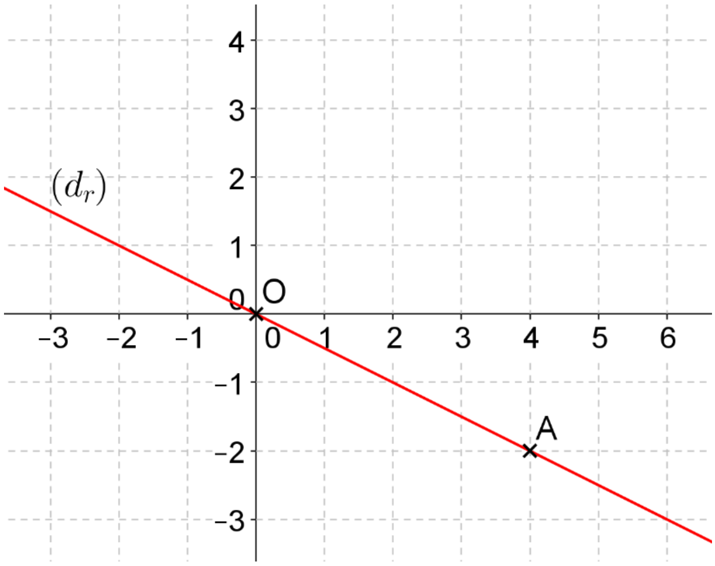
Construire et tracer sa représentation graphique.

On calcule l'image d'un nombre bien choisi.

$r(4) = -0{,}5 \times (4) = -2$

x	4
$rt(x)$	$-0{,}5 \times (-4) = -2$

La représentation graphique de la fonction linéaire r est la droite (d_r) passant par l'origine du repère, $O(0\ ;\ 0)$ et par le point $A(4\ ;-2)$.



La pente de la droite(d_r) est $-0{,}5\ <\ 0$ donc la droite « descend » elle est décroissante.

Soit t la fonction linéaire tel que $t : x \longmapsto \frac{4}{3}x$.
Construire et tracer sa représentation graphique.

On calcule l'image d'un nombre bien choisi.

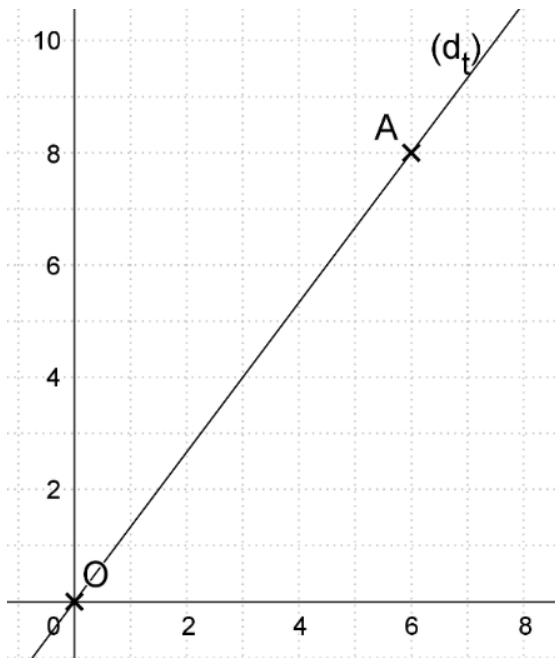
$t(6) = \frac{4}{3} \times 6 = 8$

x	6
t(x)	$\frac{4}{3} \times 6 = 8$

La représentation graphique de la fonction linéaire t est la droite (d_t) passant par l'origine du repère,

O(0 ; 0) et par le point $A(6\ ;\ 8)$.

La pente de la droite(d_t) est $\frac{4}{3} > \ 0$ donc la droite « monte » elle est croissante.



IV. Fonction linéaire et pourcentage.

Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.

Exemple

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120 €, c'est faire l'opération suivantes :

$\frac{3}{5} \times 120 = 72$ €

Remarque

Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

$$p\ \% = \frac{p}{100}$$

Prendre un pourcentage d'une quantité, c'est multiplier la quantité par $\frac{p}{100}$

Exemple

Dans une classe, 25 % des 28 élèves sont malades. Combien d'élèves sont malades ?

$$\frac{25}{100} \times 28 = 7$$

7 élèves sont malades.

Propriété

Prendre ou calculer p % d'une quantité, peut être modéliser par la fonction linéaire

$$x \mapsto \frac{p}{100}x$$

Exemple

Les articles d'un magasin d'habillement ont augmenté de 7 %.

Si on appelle x le prix de chaque produit, l'augmentation est modélisée par la fonction linéaire f définie par

$$f(x) = \frac{7}{100}x = 0{,}07x.$$

Deux produits coutent respectivement 52 € et 90 €.

Pour calculer l'augmentation de ces produits, on calcule $f(52)$ et $f(90)$.

$$f(52) = 0{,}07 \times 52 = 3{,}64\ €$$

$$f(90) = 0{,}07 \times 90 = 6{,}30\ €$$

Attention, ce ne sont pas les nouveaux prix de ces articles.

Propriété

Augmenter une quantité de p % revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Réduire une quantité de p % revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$

Démonstration

Soit Q la quantité.

p % de Q c'est $\frac{p}{100} \times Q$

Pour une augmentation de p %, la nouvelle quantité est donc :

$$Q + \frac{p}{100} \times Q = 1 \times Q + \frac{p}{100} \times Q = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times Q$$

Pour une réduction de p %, la nouvelle quantité est donnée par :

$$Q - \frac{p}{100} \times Q = 1 \times Q - \frac{p}{100} \times Q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \times Q$$

Remarque

Les deux situations sont modélisées par les fonctions linéaires :

Pour une augmentation de p %:

$$x \longmapsto \left(1 + \frac{p}{100}\right) x$$

Pour une réduction de p % :

$$x \longmapsto \left(1 - \frac{p}{100}\right) x$$

Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15%.
Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?

Calculons le prix soldé.

$$\left(1 - \frac{15}{100}\right) \times 74 = 0{,}85 \times 74 = 62{,}90$$

Le prix soldé est 62,90€.

Exemple 2

Le taux de TVA est de 20 %.
a. Donner l'expression algébrique de la fonction f qui donne le prix TTC en fonction du prix HT x.
b. Le prix HT est de 55 €. Quel est le prix TTC ?
c. Le prix TTC est de 150 €. Quel est le prix HT ?

a. $f(x) = \left(1 + \frac{20}{100}\right)x \; = \; 1{,}2x$

b. Calculons le prix TTC.

Cela revient à calculer l'image de 126 par f.

$$f(126) = 1{,}2 \times 55 = 66$$

Le prix TTC est de 66 €.

c. Calculons le prix HT.

Cela revient à calculer l'antécédent de 150 par f.

On cherche x tel que :

$$1{,}2x = 150$$

$$x = \frac{150}{1{,}2}$$

$$x = 125$$

Le prix HT est de 125 € €.

Propriétés :

Action	... prendre $t\%$ de x	… augmenter x de de $t\%$	… diminuer x de de $t\%$
Fonction linéaire	$x \longmapsto \frac{t}{100} \times x.$	$x \longmapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times x.$	$x \longmapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times x.$

Exemples :

	Prendre 5 % de x, C'est multiplier x par 0,05	Augmenter x de 5 % C'est multiplier x par 1,05.	Diminuer x de 5 % C'est multiplier x par 0,95.
Expression littérale	$\frac{5}{100}x$ $= 0{,}05x$	$x + \frac{5}{100}x$ $= \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times x$ $= 1{,}05x$	$x - \frac{5}{100}x$ $= \left(1 - \frac{5}{100}\right) \times x$ $= 0{,}95x$
Fonction linéaire	$x \longmapsto \frac{5}{100} \times x = 0{,}05\,x$	$x \longmapsto 1{,}05\,x$	$x \longmapsto 0{,}95\,x$

Application :

Un ouvrier travaille actuellement pour 1 300€ *par mois. Son prochain salaire va être augmenté de* 5%.

Quel sera son nouveau salaire ?

❖ Augmenter de 5% revient à multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$

$$1\,300 \times 1{,}05 = 1\,365$$

Le nouveau salaire est de 1 365 €.

Remarque :

Une augmentation de $t\%$ suivi d'une diminution de $t\%$ ne ramène pas à la valeur initiale.

Cas particulier

- Augmenter de 50 % une quantité, revient à la multiplier par 1,5..
- Augmenter de 100 % une quantité, revient à la multiplier par 2
- Diminuer de 50 % une quantité, revient à la multiplier par 0,5 soit à la diviser par 2.