I. Les triangles rectangles

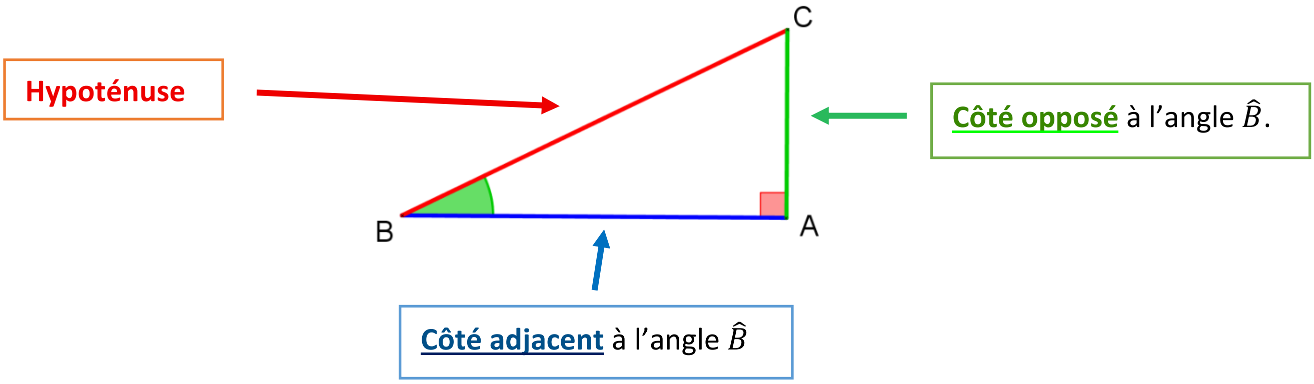
Vocabulaire

Dans le triangle ABC rectangle en A,

> le coté [BC] est le côté le plus long, c'est **l'hypoténuse** du triangle ABC.

> Le coté [AB] est **le côté adjacent** à l'angle $\hat{B}$.

> Le côté [CA] est **le côté opposé** à l'angle $\hat{B}$.



II. Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Propriété

Dans un triangle rectangle, la longueur du côté adjacent à un angle aigu est proportionnel à la longueur de l'hypoténuse.

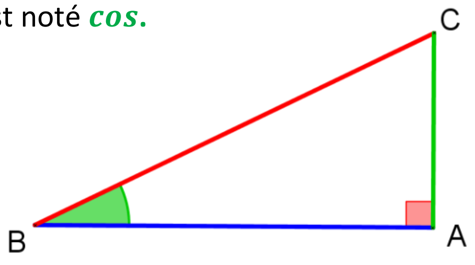
Définition

Le coefficient de proportionnalité est **« le cosinus »** de l'angle aigu et est noté ***cos***.

Dans le triangle ABC rectangle en A

$$\textit{Cos}\ \widehat{ABC} = \frac{\textit{Longueur du côté adjacent à l'angle}\ \widehat{ABC}}{\textit{Longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC}$$



Propriété

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté, donc le rapport côté adjacent / hypoténuse est forcément inférieur à 1.

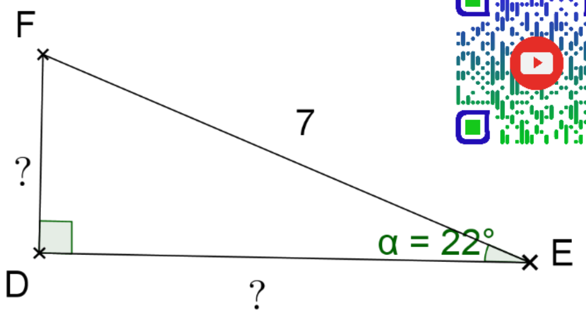
$$0 < \cos \alpha < 1$$

où α est la mesure d'un angle aigu.

III. Applications

a/ Calcul de la longueur d'un angle droit

Calculer la longueur DE au dixième près.



Calcul de la longueur DE

On sait :
- DEF rectangle en D
- $\widehat{DEF} = 22°$
- $FE = 7\ cm$: hypoténuse

On cherche :
- DE : Côté adjacent à $\widehat{DEF}$

Dans le triangle DEF rectangle en D, on a

$$\boldsymbol{cos(\widehat{DEF}) = \frac{DE}{FE}}$$

Soit

$$\boldsymbol{cos(22) = \frac{DE}{7}}$$

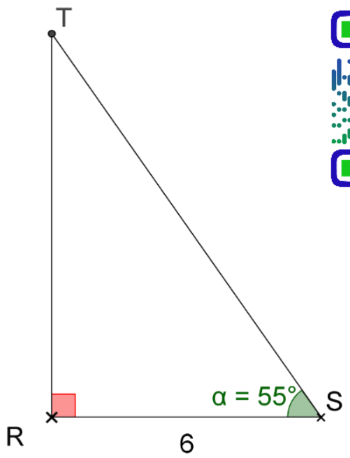
On obtient :

$$\boldsymbol{DE = 7 \times cos(22)}$$

$$\boldsymbol{\underline{DE \approx 6{,}5\ cm}}.$$

b/ Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Calculer une valeur approchée au millimètre près de longueur TS.



On sait :
- RST rectangle en R
- $\widehat{RST} = 55°$
- $RS = 6\ cm$: côté adjacent à $\widehat{RST}$

On cherche :
- ST : Hypoténuse

Dans le triangle RST rectangle en R, on a :

$$cos(\widehat{RST}) = \frac{RS}{ST}$$

Soit

$$cos(55) = \frac{6}{ST}$$

Donc :

$$ST = \frac{6}{cos(55)}$$

$$\underline{ST \approx 10{,}4\ cm}$$

c/ Calcul de la mesure d'un angle.

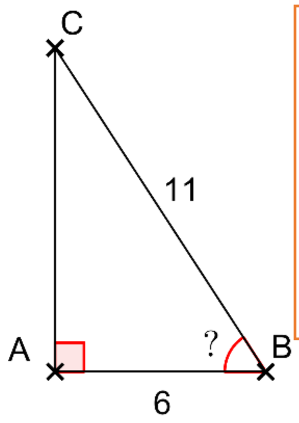
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au degré près.

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{11}$$

Avec la calculatrice, on obtient :

$$\widehat{ABC} = arccos\left(\frac{6}{11}\right) \approx 57°$$



On sait :
- ABC rectangle en A
- $AB = 6\ cm$:
$Côté\ adjacent$ à $\widehat{ABC}$
- $BC = 11\ cm$: Hypoténuse

On cherche :
- $\widehat{ABC}$

Remarques :

On ne peut pas faire autrement que d'utiliser la calculatrice.

La calculatrice doit être en mode degré.

On peut utiliser une valeur décimale approchée de $\frac{6}{11}$ mais au millième près soit 0,545.

$$\widehat{ABC} = arccos(\mathbf{0,545}) \approx 57°$$

IV. Deux nouvelles relations trigonométriques

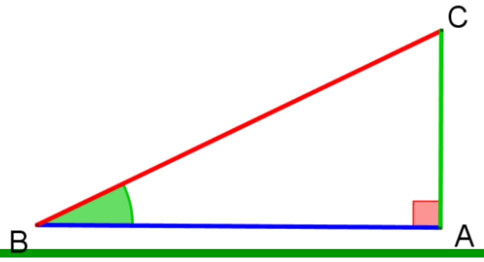
a/ Sinus d'un angles aigu dans un triangle rectangle

Définition

Dans le triangle ABC rectangle en A

$$\boldsymbol{Sin\ \widehat{ABC}} = \frac{\textbf{Longueur du côté opposé à l'angle } \boldsymbol{\widehat{ABC}}}{\textbf{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\textbf{sin } \boldsymbol{\widehat{ABC}} = \frac{\textbf{AC}}{\textbf{BC}}$$



Remarques

- Dans un triangle rectangle, la longueur du côté opposé à un angle est proportionnelle à celle de l'hypoténuse.
- Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté, donc le rapport côté opposé / hypoténuse est forcément inférieur à 1. Donc :

$$0 < \sin\alpha < 1$$

où α est la mesure d'un angle aigu.

- Dans le triangle ABC rectangle en A, on a

$\cos \widehat{C} = \frac{CA}{BC} = \sin \widehat{B}$

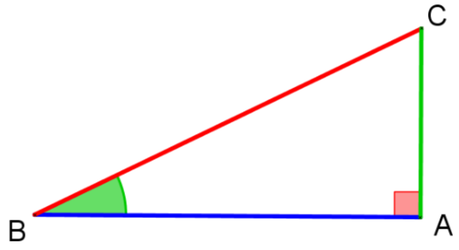
b/ Tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Définition.

Dans le triangle ABC rectangle en A

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{\textbf{Longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\textbf{Longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}$$

$$\tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$



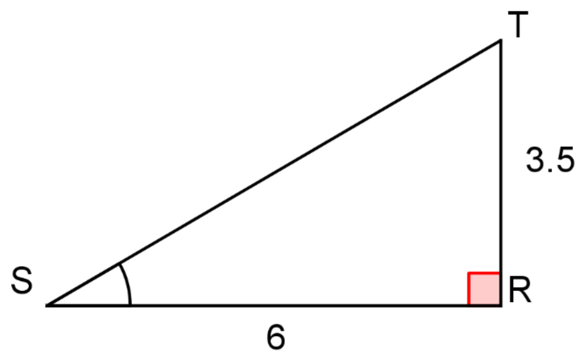
Remarque

• Dans un triangle rectangle, la longueur du côté adjacent à un angle aigu est proportionnelle à celle de du côté opposé à cet angle.

c/ Application

Enoncé 1

Dans le triangle RST rectangle en R, calculer la mesure de l'angle $\widehat{RST}$ au degré près.



Dans le triangle RST rectangle en R, on a :

$$tan(\widehat{RST}) = \frac{TR}{SR} = \frac{3,5}{6}$$

Avec la calculatrice, on obtient :

$$\widehat{RST} = arccos\left(\frac{3,5}{6}\right)$$

$$\widehat{RST} \cong 30°$$

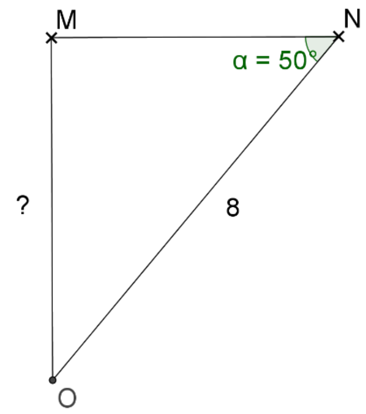
On sait :
- RST rectangle en R
- $SR = 6\ cm$: Côté adjacent à $\widehat{RST}$
- $TR = 3{,}5\ cm$: Côté opposé à $\widehat{RST}$

On cherche :
- $\widehat{RST}$

tangente

Enoncé 2

Calculer la longueur MO arrondie au dixième près.



Dans le triangle MNO rectangle en M, on a :

$$sin(\widehat{MNO}) = \frac{MO}{NO}$$

Soit

$$sin(50) = \frac{\mathbf{MO}}{\mathbf{8}}$$

Donc :

$$MO = 8 \times \sin(50)$$

$$\underline{MO \cong 6,1\ cm}$$

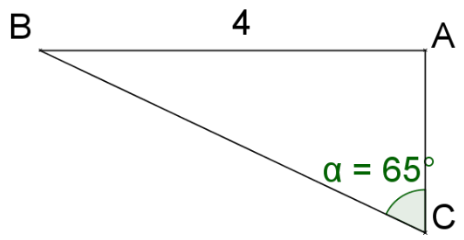
On sait :
- MNO rectangle en M ;
- $\widehat{MNO} = 50°$
- $NO = 8\ cm$: hypoténuse

On cherche :
- ST : Opposé à $\widehat{MNO}$

sinus

Enoncé 3

Calculer la longueur AC arrondie au dixième près.



Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$$

Soit

$$tan(65) = \frac{4}{AC}$$

Donc :

$$AC = \frac{4}{tan(65)}$$

$$\underline{AC \cong 1,9\ cm}$$

On sait :
- ABC rectangle en A ;
- $\widehat{ACB} = 65°$
- $AB = 4\ cm$: Opposé à $\widehat{ACB}$

On cherche :
- AC : Adjacent à $\widehat{ACB}$

tangente