I. Les nombres rationnels

Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui est le résultat d'une division de deux entiers relatifs.

Autrement dit :

Les **nombres rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme :

$\frac{a}{b}$ ou $-\frac{a}{b}$ avec a et b entiers positifs et b $\neq$ 0.

Exemples

• 1,4 peut s'écrire $\frac{14}{10}$, donc 1,4 est un nombre rationnel (1,4 est aussi un nombre décimal).

• Le quotient de 5 par – 3.

$5 : (-\ 3) = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$. Ce n'est pas un nombre décimal.

Remarques

• Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels. L'inverse n'est pas vrai.

• Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels ($\sqrt{2}$; π ; …).

Vocabulaire

$\frac{9}{16}$

Numérateur

Dénominateur

Fraction partage

$\frac{2}{5}$

Le rectangle a été partagé en 5 parties égales et 2 parties ont été coloriées.

Fraction quotient

5 × ? = 2 alors ? = 2 : 5 = $\frac{2}{5}$

Fraction proportion

Dans une c lasse, $\frac{2}{5}$ des élèves ont des lunettes.

II - Egalité de fractions.

Propriété à connaître

On ne change pas la valeur d'un nombre rationnel si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.

Pour tout nombre a, b et k des nombres relatifs (b et k non nuls) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$$

Exemples

$$\frac{3}{-2{,}5} = -\frac{3 \times 4}{2{,}5 \times 4} = -\frac{12}{10} = -1{,}2$$

Simplification de fraction

$$\frac{-25}{-35} = \frac{25}{35} = \frac{5 \times 5}{5 \times 7} = \frac{5}{7}$$

Comparaison de fraction

Comparer $-\frac{22}{15}$ et $-\frac{7}{5}$.

On met ou on réduit les deux fractions au même dénominateur

$$-\frac{7}{5} = -\frac{7 \times 3}{5 \times 3} = -\frac{21}{15}$$

On compare les numérateurs :

$22 > 21$ donc $\frac{22}{15} > \frac{21}{15}$

Deux fractions de même dénominateur sont rangées dans l'ordre de leur numérateur.

Par conséquent :

$$-\frac{22}{15} < -\frac{21}{15}$$

Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.

III. Addition et soustraction.

Méthode : fractions de même dénominateur

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont le même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \ ; \ c \neq 0$$

Exemples

$$A = \frac{7}{5} + \frac{9}{5}$$
$$A = \frac{7+9}{5}$$
$$A = \frac{16}{5}$$

$$B = \frac{9}{13} - \frac{16}{13}$$
$$B = \frac{9-16}{13}$$
$$B = \frac{-7}{13}$$
$$B = -\frac{7}{13}$$

$$C = -\frac{15}{11} + \frac{18}{11}$$
$$C = \frac{-15}{11} + \frac{18}{11}$$
$$C = \frac{-15+18}{11}$$
$$C = \frac{3}{11}$$

Méthode : fractions de dénominateurs différents

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, on réduit d'abord ces fractions au même dénominateur puis on procède comme précédemment.

Exemple

$$D = \frac{2}{5} + \frac{7}{15}$$
$$D = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} + \frac{7}{15}$$
$$D = \frac{6}{15} + \frac{7}{15}$$
$$D = \frac{6+7}{15}$$
$$D = \frac{13}{5}$$

$$E = -\frac{5}{9} - \frac{7}{18}$$
$$E = \frac{-5 \times 2}{9 \times 2} - \frac{7}{18}$$
$$E = \frac{-10}{18} - \frac{7}{18}$$
$$E = \frac{-10-7}{18}$$
$$E = \frac{-17}{18}$$
$$E = -\frac{17}{18}$$

$$F = \frac{5}{6} - \frac{-7}{9}$$
$$F = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} - \frac{-7 \times 2}{9 \times 2}$$
$$F = \frac{15}{18} - \frac{-14}{18}$$
$$F = \frac{15 - (-14)}{18}$$
$$F = \frac{15+14}{18}$$
$$F = \frac{29}{18}$$

IV. Multiplication de fractions.

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les numérateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

a, *b*, *c* et *d* désignent des nombres entiers relatifs (*b* et *d* ne peuvent pas être 0)

Exemples

$$A = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$$

Produit des numérateurs

Produit des dénominateurs

$$A = \frac{2 \times 5}{3 \times 7}$$

$$A = \frac{10}{21}$$

$$B = = \frac{3}{7} \times \frac{8}{3}$$

$$B = \frac{3 \times 8}{7 \times 3}$$

Simplification par 3.

$$B = \frac{8}{7}$$

$$C = \frac{2}{3} \times \frac{15}{4}$$

$$C = \frac{2 \times 15}{3 \times 4}$$

On décompose en produit de facteurs premiers.

$15 = 3 \times 5$ et $4 = 2 \times 2$

$$C = \frac{2 \times 3 \times 5}{3 \times 2 \times 2}$$

On peut simplifier par 2 et par 3.

$$C = \frac{5}{2}$$

$$D = \frac{-5}{-3} \times \frac{-7}{4}$$

$\frac{-5}{-3}$ est positif.

$\frac{-7}{4}$ est négatif.

Donc le produit de ces deux fractions est négatif.

$$D = -\frac{5 \times 7}{3 \times 4}$$

$$D = -\frac{35}{12}$$

V. Inverse d'un nombre rationnel

Définition

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a donne 1.

Autrement dit,

Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1.

Exemples

$25 \times 0{,}04 = 1$ donc l'inverse de 25 est 0,04 ou l'inverse de 0,04 est 25.

$(-5) \times (-0{,}2) = 1$ donc -5 et $-0{,}2$ sont inverses.

Remarques

- 0 n'a pas d'inverse.

- Deux inverses ont le même signe.

Ecriture fractionnaire de l'inverse d'un nombre.

a désigne un nombre différent de zéro.

L'inverse du nombre a en écriture fractionnaire est $\frac{1}{a}$.

Exemples

* L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$.

* L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.

* L'inverse de -5 est $\frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

Inverse d'une fraction.

Soit a et b deux nombres différents de zéro.

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

Exemples

L'inverse de $\frac{5}{7}$ est $\frac{7}{5}$

L'inverse de $-\frac{3}{2}$ est $-\frac{2}{3}$

VI. Quotient de deux nombres rationnels.

Règle (à savoir)

Diviser par un nombre différent de zéro revient à multiplier par son inverse.

Exemple

$14{,}2 : 10 = 1{,}42$ et $14{,}2 \times 0{,}1 = 1{,}42$

10 et 0,1 sont inverses.

$7 : 0{,}5 = 7 \times 2 = 14$

0,5 et 2 sont inverses.

Application : quotient de deux fractions

Soit a, b, c et d des nombres entiers relatifs différents de zéro.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Inverse de $\frac{c}{d}$

Exemples

$A = \frac{5}{4} : \frac{7}{3}$

$A = \frac{5}{4} \times \frac{3}{7}$

Multiplication par l'inverse de $\frac{7}{3}$

$A = \frac{5 \times 3}{4 \times 7}$

$A = \frac{15}{28}$

$B = \frac{35}{12} : \frac{25}{18}$

$B = \frac{-35}{12} \times \frac{18}{25}$

Multiplication par l'inverse de $\frac{25}{18}$

$B = -\frac{35 \times 18}{12 \times 25}$

Signe du produit et multiplication des deux fractions.

$B = -\frac{5 \times 7 \times 3 \times 6}{2 \times 6 \times 5 \times 5}$

Décomposition et simplification

$B = -\frac{21}{10}$

Fraction de fractions

$$C = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}}$$

Equivalant à $\frac{3}{5}$: $\frac{7}{5}$

$$C = \frac{3}{5} \times \frac{5}{7}$$

Multiplication par l'inverse de $\frac{7}{5}$

$$C = \frac{3 \times 5}{5 \times 7}$$

$$C = \frac{3}{7}$$

Simplification