Triangles semblables

Connaître et utiliser les angles d'un triangle

- Triangles semblables : angles
- Triangles semblables : longueurs

I. Des triangles semblables

Définition

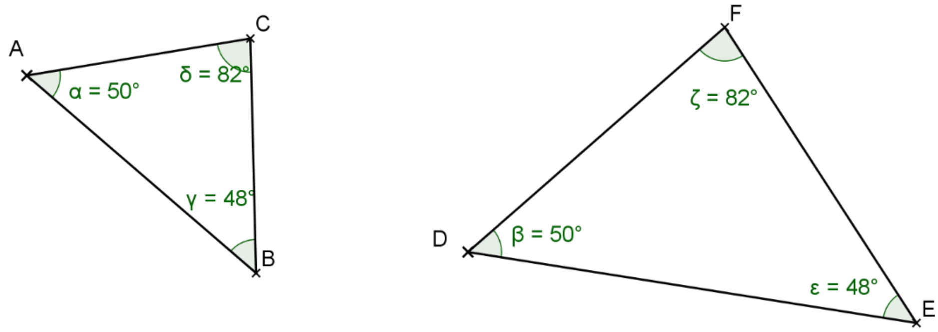
Des triangles sont semblables lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Vocabulaire

Lorsque deux triangles sont semblables :

- Un angle d'un triangle et l'angle de même mesure de l'autre triangle sont dits **homologues.**

- Les sommets ou les côtés opposés de deux angles égaux sont aussi dits **homologues.**



Angles homologues	Sommets homologues	Cotés homologues
$\widehat{CAB}$ et $\widehat{FDE}$	A et D	$[CB]$ et $[FE]$
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$	B et E	$[AB]$ et $[DE]$
$\widehat{ACB}$ et $\widehat{DFE}$	C et F	$[AB]$ et $[DE]$

Remarque :

■ Si deux triangles sont égaux alors ils sont semblables.

■ Deux triangles semblables ne sont pas forcément égaux.

Triangles semblables

II. Triangles semblables et longueurs

Propriété : côtés proportionnels

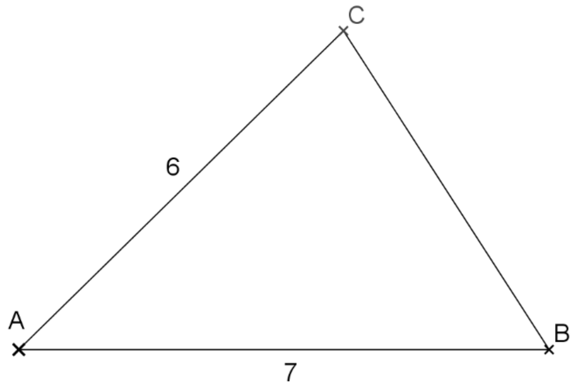
Si deux triangles ABC et EDF sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

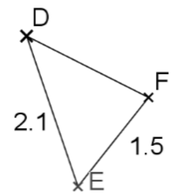
Si les sommets A, B et C sont homologues respectivement aux sommets D, E et F, on a :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Exemple

Les triangles ABC et DEF sont semblables. A, B et C sont homologues respectivement à D, E et F. On veut calculer les longueurs manquantes.





Sommets homologues	Cotés homologues
A et D	[BC] et [EF]
B et E	[AC] et [DF]
C et F	[AB] et [DE]

Les longueurs des côtés homologues des triangle ABC et A'B'C' sont proportionnelles, donc

$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ soit $\frac{2{,}1}{7} = \frac{DF}{6} = \frac{1{,}5}{BC}$

Calcul de DF.

Avec $\frac{2{,}1}{7} = \frac{DF}{6}$, on en déduit DF = $\frac{2{,}1 \times 6}{7}$ = 1,8 cm

Calcul de CB

Avec $\frac{2{,}1}{7} = \frac{1{,}5}{BC}$, on en déduit BC = $\frac{1{,}5 \times 7}{2{,}1}$ = 5 cm

III. Déterminer si deux triangles sont semblables

b/ Avec leurs angles

Propriété

Si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.

Autrement dit

Il suffit que deux angles d'un triangle soient égaux à deux angles d'un autre triangle pour dire que ces deux triangles sont semblables.

b/ Avec les longueurs des côtés

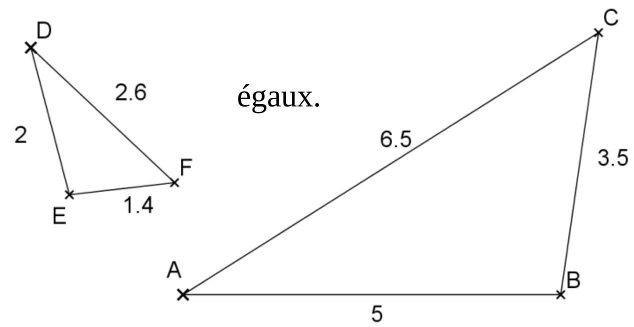
Propriété

Si les longueurs d'un triangle sont proportionnelles aux longueurs d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables.

Exemple

Pour montrer que les deux triangles suivants sont semblables, il faut déterminer les paires de côtés homologues en les rangeant dans l'ordre croissant de leur longueur.

AB $\rightarrow$ DE ;
AC $\rightarrow$ DF ;
BC $\rightarrow$ EF



On calcule les quotients pour vérifier s'ils sont égaux.

$$\frac{DE}{AB}=\frac{2}{5}=0,4$$

$$\frac{DF}{AC}=\frac{2,6}{3,5}=0,4$$

$$\frac{EF}{BC}=\frac{1,4}{3,5}=0,4$$

Comme les longueurs de ABC sont proportionnelles aux longueurs de DEF, alors ABC et DEF sont semblables.

c/ Avec un angle et deux côtés

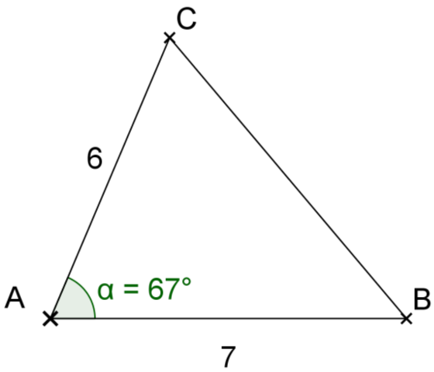
Propriété

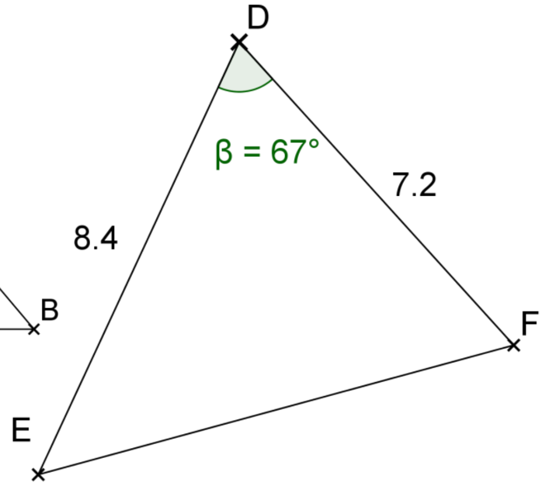
Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés dont les longueurs sont proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

Exemple

$$\frac{DE}{AB} = \frac{8,4}{7} = 1,2$$

$$\frac{DF}{AC} = \frac{7,2}{6} = 1,2$$





Comme $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et que les longueurs AB et AC sont proportionnelles aux longueurs DE et DF, alors les triangles ABC et DEF sont semblables.