Sommaire

Chapitre 1 – Nombres rationnels

Chapitre 2 – Triangles semblables

Chapitre 3 – Puissances d'un nombres

Chapitre 4 - Trigonométrie

Chapitre 5 - Equation

Chapitre 6 – Théorème de Thalès

Première partie

Deuxième partie

Chapitre 7 – Notion de fonction

Chapitre 8 - Statistique

Chapitre 9 - Nombres premiers

Chapitre 10 – Calcul littéral

- Développement

- factorisation

Chapitre 11 – Fonctions linéaires

- Fonction linéaire et proportionnalité

- Ce qu'il faut savoir-faire

- Représentation graphique

- Pourcentage et fonction linéaire.

Sommaire

Chapitre 1

Calcul avec des nombres rationnels

I. Les nombres rationnels

Définition

Un nombre rationnel est un nombre qui est le résultat d'une division de deux entiers relatifs.

Autrement dit :

Les **nombres rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme :

$\frac{a}{b}$ ou $-\frac{a}{b}$ avec a et b entiers positifs et b $\neq$ 0.

Exemples

• 1,4 peut s'écrire $\frac{14}{10}$, donc 1,4 est un nombre rationnel (1,4 est aussi un nombre décimal).

• Le quotient de 5 par – 3.

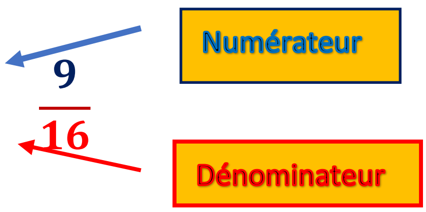
$5 : (-3) = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$. Ce n'est pas un nombre décimal.

Remarques

• Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels. L'inverse n'est pas vrai.

• Il existe des nombres qui ne sont pas rationnels ($\sqrt{2}$; π ; ...).

Vocabulaire



Fraction partage

$\frac{2}{5}$

Le rectangle a été partagé en 5 parties égales et 2 parties ont été coloriées.

Fraction quotient

5 × ? = 2 alors ? = 2 : 5 = $\frac{2}{5}$

Fraction proportion

Dans une c lasse, $\frac{2}{5}$ des élèves ont des lunettes.

II - Egalité de fractions.

Propriété à connaître

On ne change pas la valeur d'un nombre rationnel si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul.

Pour tout nombre a, b et k des nombres relatifs (b et k non nuls) :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k}$$

Exemples

$$\frac{3}{-2{,}5} = -\frac{3 \times 4}{2{,}5 \times 4} = -\frac{12}{10} = -1{,}2$$

Simplification de fraction

$$\frac{-25}{-35} = \frac{25}{35} = \frac{5 \times 5}{5 \times 7} = \frac{5}{7}$$

Comparaison de fraction

Comparer $-\frac{22}{15}$ et $-\frac{7}{5}$.

On met ou on réduit les deux fractions au même dénominateur

$$-\frac{7}{5} = -\frac{7 \times 3}{5 \times 3} = -\frac{21}{15}$$

On compare les numérateurs :

$22 > 21$ donc $\frac{22}{15} > \frac{21}{15}$

Deux fractions de même dénominateur sont rangées dans l'ordre de leur numérateur.

Par conséquent :

$$-\frac{22}{15} < -\frac{21}{15}$$

Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.

III. Addition et soustraction.

Méthode : fractions de même dénominateur

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions qui ont le même dénominateur, on additionne (ou on soustrait) les numérateurs et on garde le dénominateur commun.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \; ; \; c \neq 0$$

Exemples

$$A = \frac{7}{5} + \frac{9}{5}$$
$$A = \frac{7+9}{5}$$
$$A = \frac{16}{5}$$

$$B = \frac{9}{13} - \frac{16}{13}$$
$$B = \frac{9-16}{13}$$
$$B = \frac{-7}{13}$$
$$B = -\frac{7}{13}$$

$$C = -\frac{15}{11} + \frac{18}{11}$$
$$C = \frac{-15}{11} + \frac{18}{11}$$
$$C = \frac{-15+18}{11}$$
$$C = \frac{3}{11}$$

Méthode : fractions de dénominateurs différents

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de dénominateurs différents, on réduit d'abord ces fractions au même dénominateur puis on procède comme précédemment.

Exemple

$$D = \frac{2}{5} + \frac{7}{15}$$
$$D = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} + \frac{7}{15}$$
$$D = \frac{6}{15} + \frac{7}{15}$$
$$D = \frac{6+7}{15}$$
$$D = \frac{13}{5}$$

$$E = -\frac{5}{9} - \frac{7}{18}$$
$$E = \frac{-5 \times 2}{9 \times 2} - \frac{7}{18}$$
$$E = \frac{-10}{18} - \frac{7}{18}$$
$$E = \frac{-10-7}{18}$$
$$E = \frac{-17}{18}$$
$$E = -\frac{17}{18}$$

$$F = \frac{5}{6} - \frac{-7}{9}$$
$$F = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} - \frac{-7 \times 2}{9 \times 2}$$
$$F = \frac{15}{18} - \frac{-14}{18}$$
$$F = \frac{15-(-14)}{18}$$
$$F = \frac{15+14}{18}$$
$$F = \frac{29}{18}$$

IV. Multiplication de fractions.

Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les numérateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

a, b, c et d désignent des nombres entiers relatifs (b et d ne peuvent pas être 0)

Exemples

$$A = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$$

Produit des numérateurs

$$A = \frac{2 \times 5}{3 \times 7}$$

Produit des dénominateurs

$$A = \frac{10}{21}$$

$B = = \frac{3}{7} \times \frac{8}{3}$

$B = \frac{3 \times 8}{7 \times 3}$

Simplification par 3.

$B = \frac{8}{7}$

$C = \frac{2}{3} \times \frac{15}{4}$

$C = \frac{2 \times 15}{3 \times 4}$

On décompose en produit de facteurs premiers.

$15 = 3 \times 5$ et $4 = 2 \times 2$

$C = \frac{2 \times 3 \times 5}{3 \times 2 \times 2}$

On peut simplifier par 2 et par 3.

$C = \frac{5}{2}$

$D = \frac{-5}{-3} \times \frac{-7}{4}$

$\frac{-5}{-3}$ est positif.

$\frac{-7}{4}$ est négatif.

Donc le produit de ces deux fractions est négatif.

$D = - \frac{5 \times 7}{3 \times 4}$

$D = - \frac{35}{12}$

V. Inverse d'un nombre rationnel

Définition

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a donne 1.

Autrement dit,

Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1.

Exemples

$25 \times 0{,}04 = 1$ donc l'inverse de 25 est 0,04 ou l'inverse de 0,04 est 25.

$(-5) \times (-0{,}2) = 1$ donc -5 et $-0{,}2$ sont inverses.

Remarques

- 0 n'a pas d'inverse.

- Deux inverses ont le même signe.

Ecriture fractionnaire de l'inverse d'un nombre.

a désigne un nombre différent de zéro.

L'inverse du nombre a en écriture fractionnaire est $\frac{1}{a}$.

Exemples

* L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$.

* L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$.

* L'inverse de -5 est $\frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

Inverse d'une fraction.

Soit a et b deux nombres différents de zéro.

L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$

Exemples

L'inverse de $\frac{5}{7}$ est $\frac{7}{5}$

L'inverse de $-\frac{3}{2}$ est $-\frac{2}{3}$

VI. Quotient de deux nombres rationnels.

Règle (à savoir)

Diviser par un nombre différent de zéro revient à multiplier par son inverse.

Exemple

$14{,}2 : 10 = 1{,}42$ et $14{,}2 \times 0{,}1 = 1{,}42$

10 et 0,1 sont inverses.

$7 : 0{,}5 = 7 \times 2 = 14$

0,5 et 2 sont inverses.

Application : quotient de deux fractions

Soit $a, b, c\ et\ d$ des nombres entiers relatifs différents de zéro.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Inverse de $\frac{c}{d}$

Exemples

$A = \frac{5}{4} : \frac{7}{3}$

$A = \frac{5}{4} \times \frac{3}{7}$

Multiplication par l'inverse de $\frac{7}{3}$

$A = \frac{5 \times 3}{4 \times 7}$

$A = \frac{15}{28}$

Multiplication par l'inverse de $\frac{25}{18}$

$B = \frac{35}{12} : \frac{25}{18}$

$B = \frac{-35}{12} \times \frac{18}{25}$

Signe du produit et multiplication des deux fractions.

$B = -\frac{35 \times 18}{12 \times 25}$

$B = -\frac{5 \times 7 \times 3 \times 6}{2 \times 6 \times 5 \times 5}$

Décomposition et simplification

$B = -\frac{21}{10}$

Fraction de fractions

$$C = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}}$$

Equivalant à $\frac{3}{5} : \frac{7}{5}$

$$C = \frac{3}{5} \times \frac{5}{7}$$

Multiplication par l'inverse de $\frac{7}{5}$

$$C = \frac{3 \times 5}{5 \times 7}$$

$$C = \frac{3}{7}$$

Simplification

Chapitre 2

Triangles semblables

Sommaire

I. Des triangles semblables

Définition

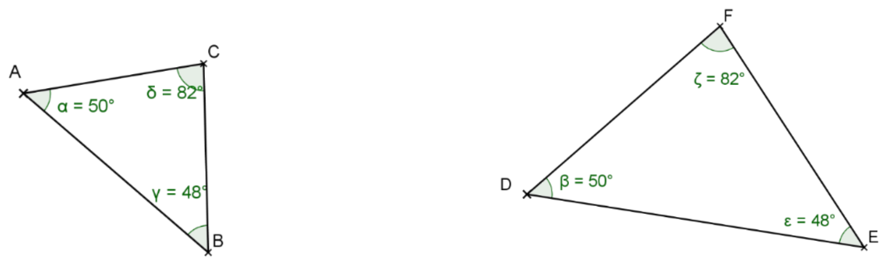
Des triangles sont semblables lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Vocabulaire

Lorsque deux triangles sont semblables :

- Un angle d'un triangle et l'angle de même mesure de l'autre triangle sont dits **homologues.**

- Les sommets ou les côtés opposés de deux angles homologues sont aussi dits **homologues.**



Angles homologues	Sommets homologues	Cotés homologues
$\widehat{CAB}$ et $\widehat{FDE}$	A et D	$[CB]$ et $[FE]$
$\widehat{ABC}$ et $\widehat{DEF}$	B et E	$[AB]$ et $[DE]$
$\widehat{ACB}$ et $\widehat{DFE}$	C et F	$[AB]$ et $[DE]$

Remarque :

- Si deux triangles sont égaux alors ils sont semblables.
- Deux triangles semblables ne sont pas forcément égaux.

II. Triangles semblables et longueurs

Propriété : côtés proportionnels

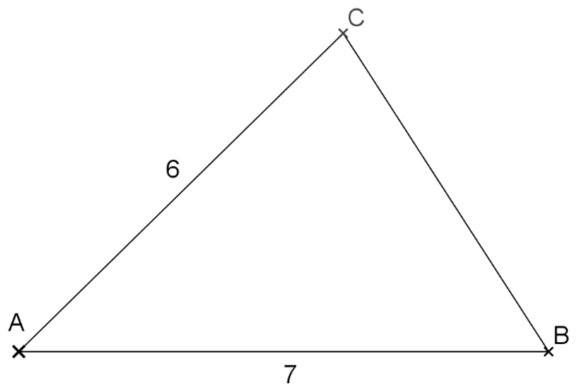
Si deux triangles ABC et EDF sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

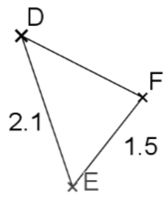
Si les sommets A, B et C sont homologues respectivement aux sommets D, E et F, on a :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Exemple

Les triangles ABC et DEF sont semblables. A, B et C sont homologues respectivement à D, E et F. On veut calculer les longueurs manquantes.





Sommets homologues	Cotés homologues
A et D	[BC] et [EF]
B et E	[AC] et [DF]
C et F	[AB] et [DE]

Les longueurs des côtés homologues des triangle ABC et A'B'C' sont proportionnelles, donc

$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ soit $\frac{2,1}{7} = \frac{DF}{6} = \frac{1,5}{BC}$

Calcul de DF.

Avec $\frac{2,1}{7} = \frac{DF}{6}$, on en déduit DF = $\frac{2,1 \times 6}{7}$ = 1,8 cm

Calcul de CB

Avec $\frac{2,1}{7} = \frac{1,5}{BC}$, on en déduit BC = $\frac{1,5 \times 7}{2,1}$ = 5 cm

III. Déterminer si deux triangles sont semblables

b/ Avec leurs angles

Propriété

Si deux triangles ont deux angles deux à deux égaux, alors ils sont semblables.

Autrement dit

Il suffit que deux angles d'un triangle soient égaux à deux angles d'un autre triangle pour dire que ces deux triangles sont semblables.

b/ Avec les longueurs des côtés

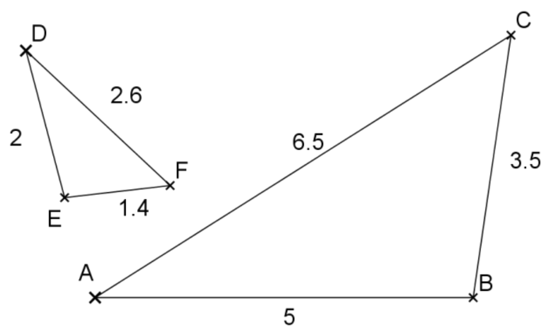
Propriété

Si les longueurs d'un triangle sont proportionnelles aux longueurs d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables.

Exemple

Pour montrer que les deux triangles suivants sont semblables, il faut déterminer les paires de côtés homologues en les rangeant dans l'ordre croissant de leur longueur.

AB → DE ;
AC → DF ;
BC → EF



On calcule les quotients pour vérifier s'ils sont égaux.

$$\frac{DE}{AB} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{DF}{AC} = \frac{2,6}{3,5} = 0,4$$

$$\frac{EF}{BC} = \frac{1,4}{3,5} = 0,4$$

Comme les longueurs de ABC sont proportionnelles aux longueurs de DEF, alors ABC et DEF sont semblables.

c/ Avec un angle et deux côtés

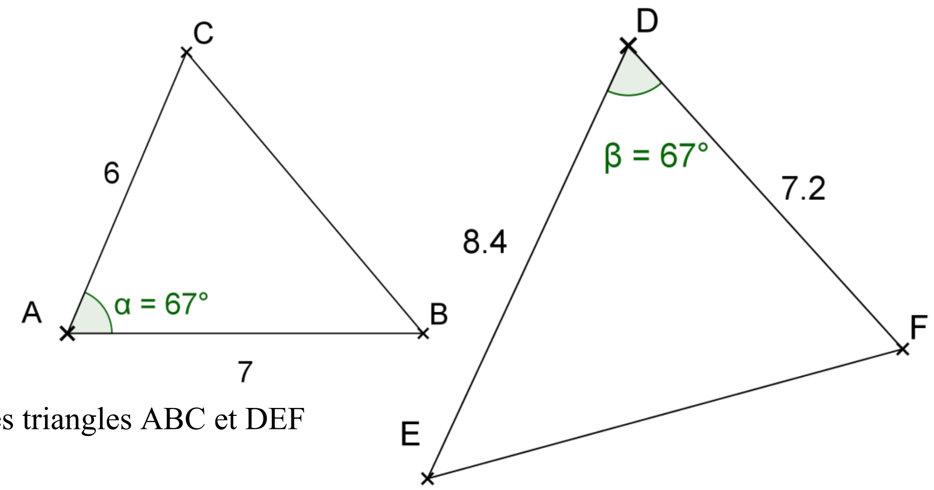
Propriété

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés dont les longueurs sont proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

Exemple

$$\frac{DE}{AB} = \frac{8,4}{7} = 1,2$$

$$\frac{DF}{AC} = \frac{7,2}{6} = 1,2$$



Comme $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ et que les longueurs AB et AC sont proportionnelles aux longueurs DE et DF, alors les triangles ABC et DEF sont semblables.

Chapitre 3

Puissances d'un nombre

Sommaire

I. Puissances d'un nombre relatif

a/ Puissances d'exposant entier positif

Définition

a désigne un nombre relatif et n désigne un nombre entier positif non nul.

Le produit de n facteurs tous égaux à a se note a^n.

a^n est la puissance n de a et se lit « a exposant n »

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$$

● $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

● $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$

● $10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$

Cas particuliers

$$a^1 = a$$

Pour a ≠ 0, on convient que $a^0 = 1$

$(-7)^1 = -7$ $\quad$ $3{,}7^0 = 1$

b/ Puissances d'exposant entier négatif.

Définition

a désigne un nombre relatif et n désigne un nombre entier positif non nul

Le nombre a^{-n} est l'inverse du nombre a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

● $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

● $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}00001$

Cas particuliers

Pour a ≠ 0 ; $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$. Ainsi a^{-1} est l'inverse du nombre a.

● $7^{-1} = \frac{1}{7}$

● $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

II. Puissances et règle de priorité

Règle de priorité

→ En l'absence de parenthèses, on calcule les puissances avant d'effectuer les autres opérations (× et : et ensuite + et –)

→ En présence de parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

Exemples

$A = 5 \times 3^2 = 5 \times 9 = 45$

$B = -4^2 = -4 \times 4 = -16$

$C = -2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 9$
$C = -2 \times 25 + 15 + 9$
$C = -50 + 24$
$C = -26$

$D = (3 - 7)^2 = (-4)^2 = 16$

III. Nombres décimaux et puissances de 10

La lettre n désigne un entier positif.

Quand on multiplie un nombre décimal par 10^n, on déplace la virgule de n rangs vers la droite.

Quand on multiplie un nombre décimal par 10^{-n} on déplace la virgule de n rangs vers la gauche.

IV. Ecriture scientifique d'un nombre décimal.

Définition

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est l'unique écriture de la forme $a \times 10^n$ dans laquelle :

- $1 \leq a < 10$

a est un nombre décimal qui possède un seul chiffre avant la virgule, ce chiffre étant non nul ;

- n est un nombre entier relatif.

Exemple

→ $E = 7{,}45 \times 10^3$
E est en écriture scientifique. a = 7,45 et n = 3
$7{,}45 \times 10^3$ est l 'écriture scientifique du nombre 7 450

→ $G = 5{,}2 \times 10^{-2}$
G est écrit en notation scientifique : a = 5,56 et n = - 2

$5{,}2 \times 10^{-2}$ est l'écriture scientifique du nombre 0,052

→ $H = 0{,}38 \times 10^5$
H n'est pas écrit en notation scientifique, car le chiffre avant la virgule est 0.
$0{,}38 \times 10^5$ peut être écrit en notation scientifique.
$0{,}38 \times 10^5 = 38\,000 = 3{,}8 \times 10^4$

Remarques.

Cette notation permet d'écrire plus facilement des approximations des nombres décimaux très grands ou très petits.

$1\,259\,569\,836 \cong 1.25 \times 10^9$
$0{,}0000000123146 \cong 1{,}23 \times 10^{-9}$

Elle permet aussi de comparer plus facilement des nombres.

On compare en premier les puissances de 10. Si elles sont différentes, le plus grand nombre est celui qui a la plus grande puissance de 10. Si elles sont égales, on compare les nombres placés avant la puissance de 10.

$5{,}56 \times 10^{56} < 2{,}4 \times 10^{57}$

$2{,}6 \times 10^{-26} > 2{,}35 \times 10^{-26}$

Méthode :

Effectuer des calculs de puissances et présenter le résultat en notation scientifique

Calculer et donner le résultat en notation scientifique et décimale :

$A = 7{,}5 \times 10^5 \times 4 \times 8{,}2 \times (10^{-1})^2$ $\qquad B = 8 \times 10^2 + 85 \times 10^{-2}$

$C = \dfrac{3 \times 10^3 \times 7 \times 10^2}{50 \times 10}$

$A = 7{,}5 \times 4 \times 8{,}2 \times 10^5 \times (10^{-1})^2$ $\mathrm{A} = 246 \times 10^5 \times (0{,}1)^2$ $\mathrm{A} = 246 \times 100\,000\, x \times 0{,}01$ $\mathrm{A} = 246 \times 1000$ $\mathrm{A} = 246\,000$ (*Écriture décimale*) $\mathrm{A} = 2{,}46 \times 10^5$ (*Écriture scientifique*)	$B = 8 \times 10^2 + 85 \times 10^{-2}$ $B = 800 + 0{,}85$ $B = 800{,}85$ $B = 8{,}0085 \times 10^2$	$C = \dfrac{3 \times 10^3 \times 7 \times 10^2}{50 \times 10}$ $\mathrm{C} = \dfrac{3 \times 7}{50} \times \dfrac{10^3 \times 10^2}{10}$ $\mathrm{C} = 0{,}42 \times \dfrac{1000 \times 100}{10}$ $\mathrm{C} = 0{,}42 \times 10\,000$ $\mathrm{C} = 4\,200$ $\mathrm{C} = 4{,}2 \times 10^3$

Résolution d'un problème avec des nombres en écriture scientifique.

La structure métallique de la tour Eiffel a une masse de 7 300 tonnes. On considère que la structure est composée essentiellement de fer.

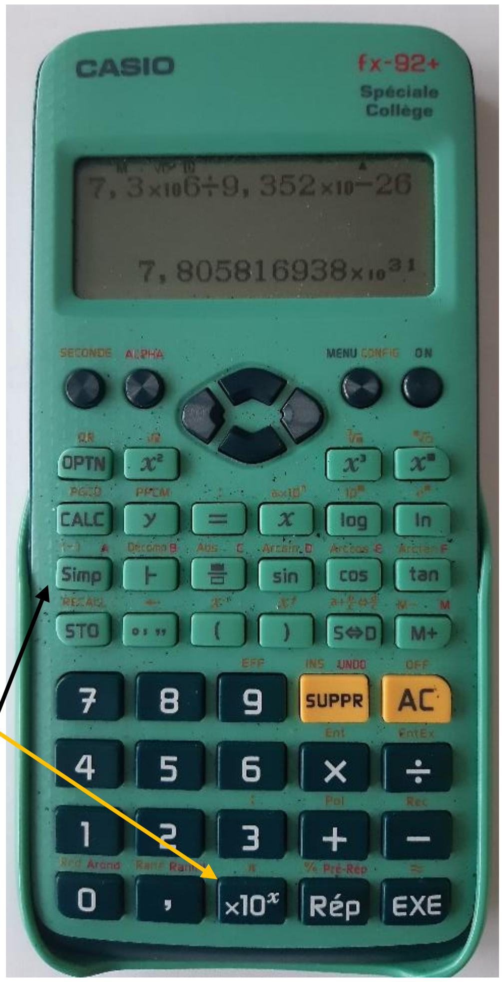
Sachant qu'un atome de fer a une masse de $9{,}352 \times 10^{-26}$ kg, combien y a-t-il d'atomes de fer dans la structure ? Arrondir.

7 300 tonnes = $7\,300\,000$ kg $= 7{,}3 \times 10^{6}$ kg.

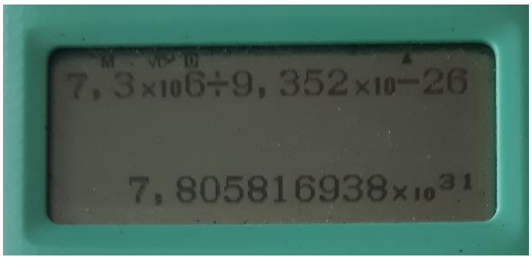
Calcul du nombres d'atomes de fer dans la structure de la Tour Eiffel.

$$7{,}3 \times 10^{6} : 9{,}352 \times 10^{-26} \cong 7{,}81 \times 10^{31}$$

Dans la structure de la Tour Eiffel, il y a environ $7{,}81 \times 10^{31}$ atomes de fer.



On utilise la touche $\boxed{\times 10^{x}}$



Remarques :

Il ne faut pas taper sur la touche $\boxed{\times}$.

Le signe $-$ se fait avec les touches $\boxed{\text{Seconde}}$ et $\boxed{(-)}$

VI. Préfixes multiplicatifs (pour rappel).

	Plus grand que l'unité					Unité	Plus petit que l'unité				
Préfixe	giga	méga	kilo	hecto	déca		déci	centi	milli	micro	Nano
Symbole	G	M	k	h	da		d	c	m	μ	n
Puissance associée	10^9	10^6	10^3	10^2	10^1		10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

3,2 km = $3{,}2 \times 10^3$ m = 3 200 m

2,5 Gm = $2{,}5 \times 10^9$ m= 2 500 000 000 m.

52 000 000 o = 52×10^6 o = 52 Mo

5 μm = 5×10^{-6} m = 0,000005 m

Chapitre 4

Sommaire

Trigonométrie

I. Les triangles rectangles

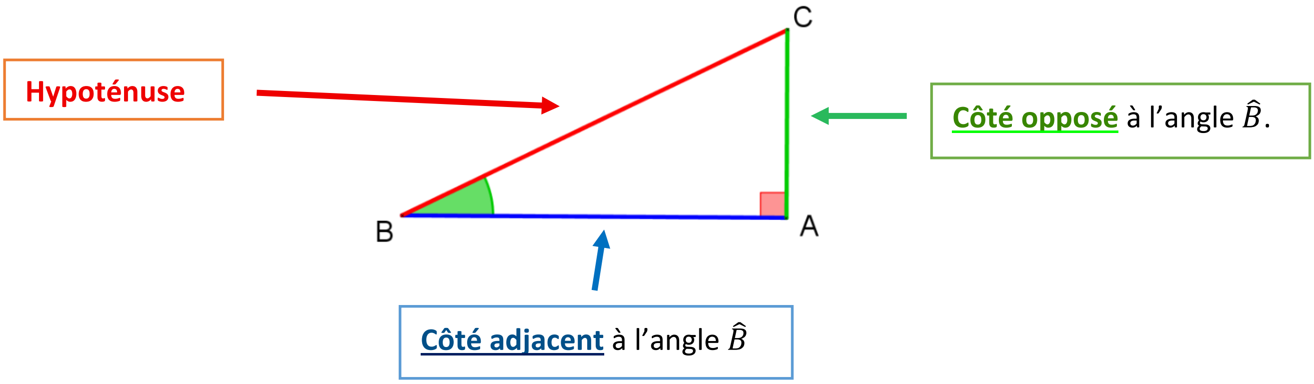
Vocabulaire

Dans le triangle ABC rectangle en A,

> le coté [BC] est le côté le plus long, c'est **l'hypoténuse** du triangle ABC.

> Le coté [AB] est **le côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$.

> Le côté [CA] est **le côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.



II. Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Propriété

Dans un triangle rectangle, la longueur du côté adjacent à un angle aigu est proportionnel à la longueur de l'hypoténuse.

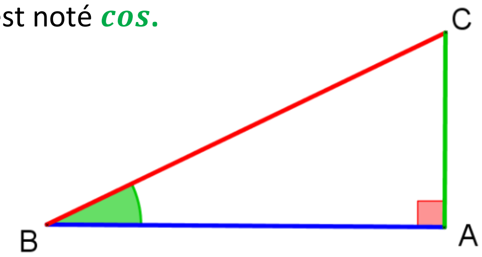
Définition

Le coefficient de proportionnalité est **« le cosinus »** de l'angle aigu et est noté ***cos.***

Dans le triangle ABC rectangle en A

$$Cos\ \widehat{ABC} = \frac{\text{Longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BA}{BC}$$



Propriété

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté, donc le rapport côté adjacent / hypoténuse est forcément inférieur à 1.

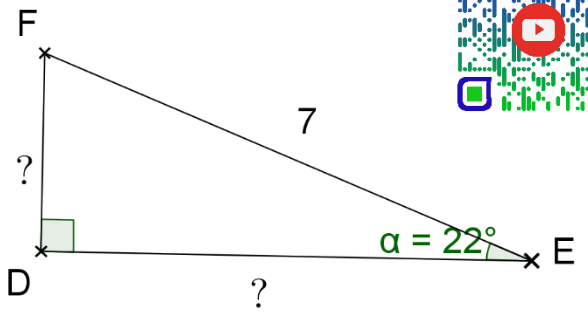
$$0 < \cos \alpha < 1$$

où α est la mesure d'un angle aigu.

III. Applications

a/ Calcul de la longueur d'un angle droit

Calculer la longueur DE au dixième près.



On sait :
- DEF rectangle en D
- $\widehat{DEF} = 22°$
- $FE = 7\ cm$: hypoténuse

On cherche :
- DE : Côté adjacent à $\widehat{DEF}$

Calcul de la longueur DE

Dans le triangle DEF rectangle en D, on a

$$\cos(\widehat{DEF}) = \frac{DE}{FE}$$

Soit

$$\cos(22) = \frac{DE}{7}$$

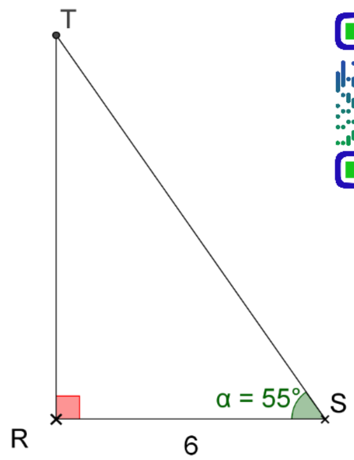
On obtient :

$$DE = 7 \times \cos(22)$$

$$\underline{DE \approx 6{,}5\ cm}.$$

b/ Calcul de la longueur de l'hypoténuse

Calculer une valeur approchée au millimètre près de longueur TS.



On sait :
- RST rectangle en R
- $\widehat{RST} = 55°$
- $RS = 6\ cm$: côté adjacent à $\widehat{RST}$

On cherche :
- ST : Hypoténuse

Dans le triangle RST rectangle en R, on a :

$$\cos(\widehat{RST}) = \frac{RS}{ST}$$

Soit

$$\cos(55) = \frac{6}{ST}$$

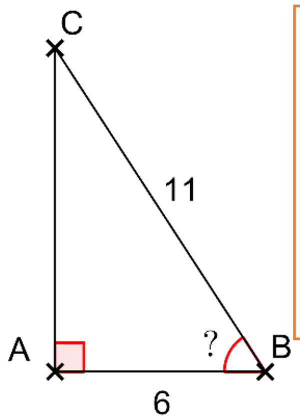
Donc :

$$ST = \frac{6}{\cos(55)}$$

$$\underline{ST \approx 10{,}4\ cm}$$

c/ Calcul de la mesure d'un angle.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au degré près.



On sait :
- ABC rectangle en A
- $AB = 6\ cm$: $Côté\ adjacent$ à $\widehat{ABC}$
- $BC = 11\ cm$: Hypoténuse

On cherche :
- $\widehat{ABC}$

Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$\boldsymbol{cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{11}}$$

Avec la calculatrice, on obtient :

$$\boldsymbol{\widehat{ABC} = arccos\left(\frac{6}{11}\right) \approx 57°}$$

Remarques :

On ne peut pas faire autrement que d'utiliser la calculatrice.

La calculatrice doit être en mode degré.

On peut utiliser une valeur décimale approchée de $\frac{6}{11}$ mais au millième près soit 0,545.

$$\boldsymbol{\widehat{ABC} = arccos(0,545) \approx 57°}$$

IV. Deux nouvelles relations trigonométriques

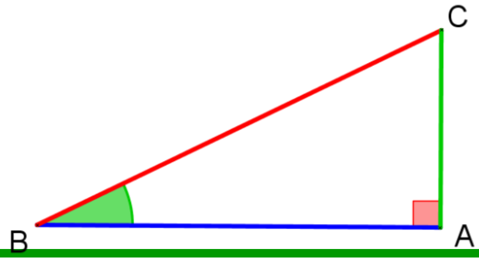
a/ Sinus d'un angles aigu dans un triangle rectangle

Définition

Dans le triangle ABC rectangle en A

$$\boldsymbol{Sin\ \widehat{ABC} = \frac{\text{Longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}}$$

$$\boldsymbol{\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}}$$



Remarques

• Dans un triangle rectangle, la longueur du côté opposé à un angle est proportionnelle à celle de l'hypoténuse.

• Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté, donc le rapport côté opposé / hypoténuse est forcément inférieur à 1. Donc :

$$0 < \sin \alpha < 1$$

où α est la mesure d'un angle aigu.

• Dans le triangle ABC rectangle en A, on a

$\cos \widehat{C} = \frac{CA}{BC} = \sin \widehat{B}$

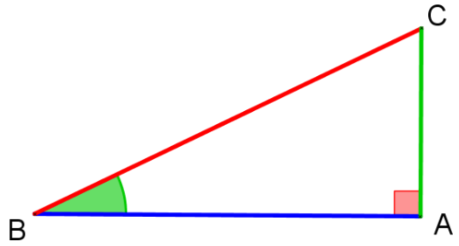
b/ Tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Définition.

Dans le triangle ABC rectangle en A

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\textbf{Longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{ABC}}{\textbf{Longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{ABC}}$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB}$$



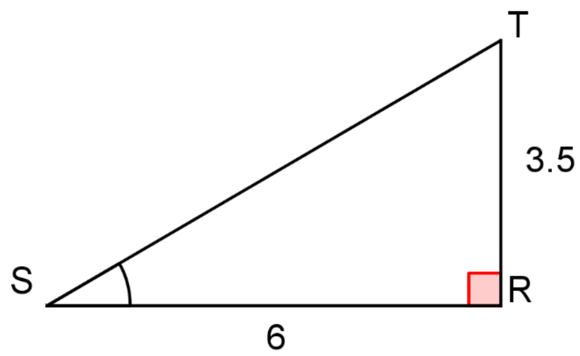
Remarque

• Dans un triangle rectangle, la longueur du côté adjacent à un angle aigu est proportionnelle à celle de du côté opposé à cet angle.

c/ Application

Enoncé 1

Dans le triangle RST rectangle en R, calculer la mesure de l'angle $\widehat{RST}$ au degré près.



On sait :
- RST rectangle en R
- $SR = 6\ cm$: $Côté\ adjacent\ à\ \widehat{RST}$
- $TR = 3{,}5\ cm$: $Côté\ opposé\ à\ \widehat{RST}$

On cherche :
- $\widehat{RST}$

$\boldsymbol{tangente}$

Dans le triangle RST rectangle en R, on a :

$$tan(\widehat{RST}) = \frac{TR}{SR} = \frac{3,5}{6}$$

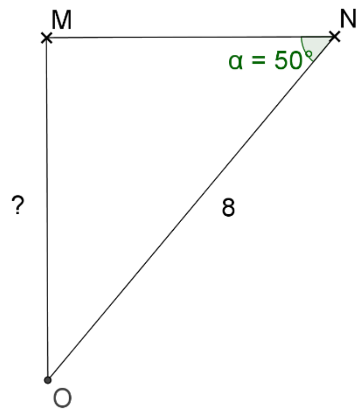
Avec la calculatrice, on obtient :

$$\widehat{RST} = arccos\left(\frac{3,5}{6}\right)$$

$$\widehat{RST} \cong 30°$$

Enoncé 2

Calculer la longueur MO arrondie au dixième près.



Dans le triangle MNO rectangle en M, on a :

$$\boldsymbol{sin(\widehat{MNO}) = \frac{MO}{NO}}$$

Soit

$$\boldsymbol{sin(50) = \frac{MO}{8}}$$

Donc :

$$\boldsymbol{MO = 8 \times \sin(50)}$$

$$\underline{\boldsymbol{MO \cong 6,1\ cm}}$$

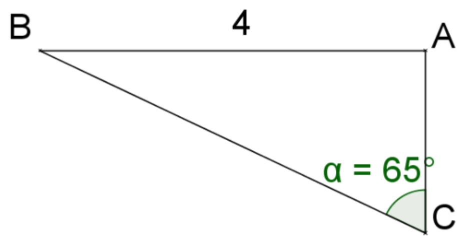
On sait :
- MNO rectangle en M ;
- $\widehat{MNO} = 50°$
- $NO = 8\ cm$: hypoténuse

On cherche :
- ST : Opposé à $\widehat{MNO}$

$\boldsymbol{sinus}$

Enoncé 3

Calculer la longueur AC arrondie au dixième près.



Dans le triangle ABC rectangle en A, on a :

$$\boldsymbol{tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}}$$

Soit

$$\boldsymbol{tan(65) = \frac{4}{AC}}$$

Donc :

$$\boldsymbol{AC = \frac{4}{tan(65)}}$$

$$\underline{\boldsymbol{AC \cong 1,9\ cm}}$$

On sait :
- ABC rectangle en A ;
- $\widehat{ACB} = 65°$
- $AB = 4\ cm$: Opposé à $\widehat{ACB}$

On cherche :
- AC : Adjacent à $\widehat{ACB}$

$\boldsymbol{tangente}$

Chapitre 5

Sommaire

Equation

I. Equation à une inconnue

Vocabulaire

Une équation est une égalité entre deux expressions littérales. Les lettres dans les équations sont appelées **les inconnues**. L'égalité est vraie pour certaines valeurs de ces inconnues. Ces valeurs sont **les solutions** de l'équation.

Résoudre une équation à une inconnue, c'est trouver toutes les solutions de l'équation.

Résolution d'une équation du premier degré.

Exemple :

Résoudre l'équation $7x - 2 = 3x + 12$

$7x - 2 = 3x + 12$

$7x - 2 + 2 = 3x + 12 + 2$ →On ajoute 2 aux deux membres de l'égalité.

$7x = 3x + 14$

$7x - 3x = 3x + 14 - 3x$ →On soustrait $3x$ aux deux membres de l'égalité.

$4x = 14$

$x = \frac{14}{4}$ →On divise les deux membres de l'égalité par 4

$x = 3{,}5$

La solution de l'équation 3,5

On peut noter : $\mathcal{S} = \{3{,}5\}$

Résolution d'un problème en utilisant une équation.

Pour résoudre un problème en posant une équation, on suivra toujours cette méthode :

1/ On choisit l'inconnue.

2/ On traduit l'énoncé par une équation.

3/ On résout l'équation.

4/ On vérifie au brouillon si la réponse est juste et plausible.

5/ On rédige la réponse.

Paul calcule que s'il achète deux croissants et une brioche à 1,83 €, il dépense 0,47 € de plus que s'il achète quatre croissants.

Quel est le prix en euros d'un croissant ?

1/ On désigne par x le prix d'un croissant en euros.

2/ Le prix en euros de deux croissants et d'une brioche est donné par :

$2x + 1{,}83$

Le prix en euros de quatre croissants est égal à :

$4x$

Comme il dépense 0,47 € de plus si il achète 4 croissants, on obtient l'équation suivante :

$$2x + 1{,}83 = 4x + 0{,}47$$

3/ Résolution de l'équation

$$\begin{aligned}
2x + 1{,}83 &= 4x + 0{,}47 \\
2x - 4x &= 0{,}47 - 1{,}83 \\
-2x &= -1{,}36 \\
x &= \frac{-1{,}36}{-2} \\
x &= 0{,}68
\end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{0{,}68\}$$

4/ Vérification (au brouillon).

Vérification : $2 \times 0{,}68 + 1{,}83 = 3{,}19$ et $4 \times 0{,}68 = 2{,}72$

On a bien : $3{,}19 - 2{,}72 = 0{,}47$.

Le prix d'un croissant peut être 0,68 €.

5/ Phrase réponse.

Le prix d'un croissant est 0,68 €.

Exemple :

Jean achète une tarte et huit croissants. Le tout coûte 28.38 €. La tarte coûte 21.50 €.

Calculer le prix d'un croissant.

→ Soit x le prix d'un croissant en euros.	→On choisit l'inconnue : ici, le prix d'un croissant.
→ J'achète 8 croissants donc $8x$ x est solution de l'équation : $8x + 21{,}5 = 28{,}38$ →Ce qui donne : $8x = 28{,}38 - 21{,}5$ $8x = 6{,}88$ $x = \frac{6{,}88}{8}$ $x = 0{,}86$ $\mathcal{S} = \{0{,}86\}$	→ On traduit l'énoncé « la tarte et les 5 croissants coûtent 91,80 F. → On résout l'équation.
→ Un croissant coûte 0,86 €.	→ On rédige la réponse.

II. Equation produit nul.

a/ Propriétés.

→ Si un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul.

Autrement dit : Quel que soit le nombre x, **0** $\times$ **x = 0**

→ Si un produit est nul, alors au moins un de ses facteurs est nul

Autrement dit : Sachant A $\times$ B = 0, on peut dire que A = 0 ou B = 0

b/ Application à la résolution d'une équation produit nul.

Résoudre $(2x+3)(5x+4)=0$

Si un produit est nul alors l'un de ses facteurs est nul ; donc

$2x+3=0$	ou	$5x+4=0$
$2x=-3$		$5x=-4$
$x=\frac{-3}{2}$		$x=\frac{-4}{5}$

Donc l'équation $(2x+3)(5x+4)=0$ a deux solutions qui sont $\frac{-3}{2}$ et $\frac{-4}{5}$

III. Résolution de l'équation $x^2 = a$

Soit à résoudre $x^2 = a$ avec a $>$ 0.

On a :

$$x^2 - a = 0$$

$$x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$$

On reconnait l'identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

On factorise.

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs est nul, donc :

$x - \sqrt{a} = 0$ ou $x + \sqrt{a} = 0$

$x = \sqrt{a}$ $\qquad$ $x = -\sqrt{a}$

Les solutions de l'équation sont $\sqrt{a}$et $-\sqrt{a}$

Si a = 0, alors la solution est double et c'est 0.

Si a < 0, alors $\sqrt{a}$ n'a pas de sens, donc l'équation n'a pas de solution.

Propriété.

→ Si a > 0, alors l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$

→ L'équation $x^2 = 0$ admet une solution : 0

→ Si a < 0 alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution.

Exemples :

$x^2 = 7$ cette équation a deux solutions $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$.

Chapitre 6

Sommaire

Le théorème de Thalès

I. Le théorème de Thalès

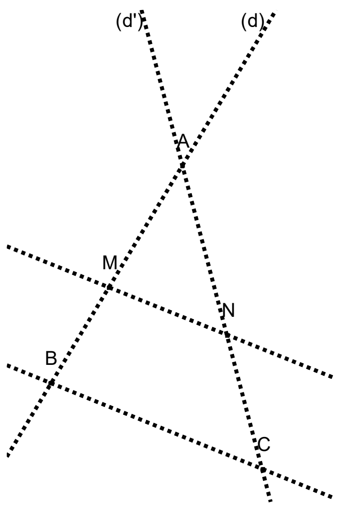
Enoncé du théorème de Thalès

Si les points A, B et M sont alignés ainsi que les points A, C et M et si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

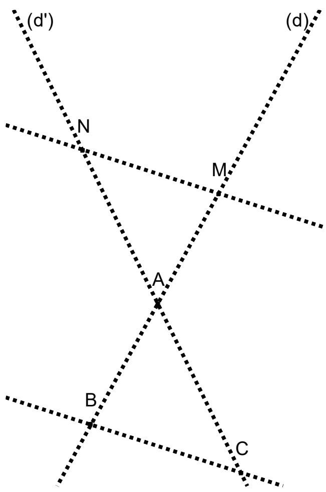
Autre formulation de l'énoncé

Si les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Il y a deux configurations possibles :



- **M∈[AB] et N∈[AC]**



- **M∈[BA) et M∉[AB]**
  N∈[AC) et N∉[AC]

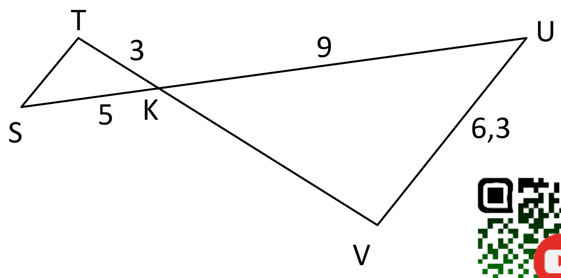
Remarque

- Les triangles ABC et AMN sont semblables donc les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles.
- La propriété de Thalès permet de calculer une longueur quand on en connaît trois autres.
- Le triangle AMN est un agrandissement ou une réduction du triangle ABC.

Exemple :

On considère la figure suivante avec (ST)//(UV).

Calculer KV et ST.



Les points T, K et V sont alignés, ainsi que les points S, K et U.

De plus, puisque les droites (ST) et (UV) sont parallèles, d'après la propriété de Thalès, on a :

$\frac{\mathbf{KT}}{\mathbf{KV}} = \frac{\mathbf{KS}}{\mathbf{KU}} = \frac{\mathbf{ST}}{\mathbf{UV}}$ soit $\frac{3}{KV} = \frac{5}{9} = \frac{ST}{6,3}$

Calcul de KV.	Calcul de KV.
Avec $\frac{3}{KV} = \frac{5}{9}$ On obtient : $KV = \frac{3\times 9}{5}$ Soit $KV = 5,4$ cm	Avec $\frac{5}{9} = \frac{ST}{6,3}$ On obtient : $ST = \frac{5\times 6,3}{9}$ Soit : $ST =$ 3,5 cm.

Soit KV= $\frac{3\times 9}{5}$ = 5,4   et   ST= $\frac{5\times 6,3}{9}$ = 3,5

II. Réciproque de la propriété de Thalès :

Sommaire

Propriété :

Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en un point A

si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$,

et Si les points A, B et M sont dans le même ordre que les points A, C et N.

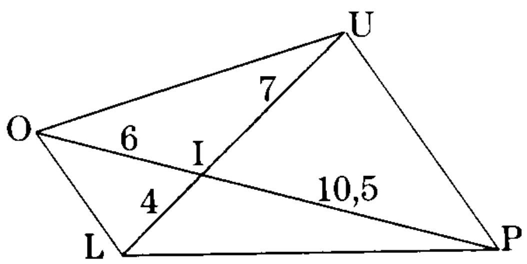
Alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Remarque :

- La réciproque de la propriété de Thalès permet de démontrer que des droites sont parallèles.
- On calcule séparément les deux quotients et on les compare.
- Il faut que les deux conditions soient vérifiées pour conclure au parallélisme (Ordre des points et quotients égaux)
- Si une des deux conditions n'est pas vérifiée, alors les droites ne sont pas parallèles.

Exemple :

Avec les données de la figure suivante, démontrer que (OL) est parallèle à (UP)



D'une part,

$\frac{IP}{IO} = \frac{10,5}{6} = 1,75$

D'autre part,

$\frac{IU}{IL} = \frac{7}{4} = 1,75$

Donc, $\frac{IP}{IO} = \frac{IU}{IL}$

De plus, les points O, I et P sont alignés dans le même ordre que les points L, I et P

Donc, d'après la réciproque de la propriété de Thalès, et on déduit que (OL) est parallèle à (UP).

Remarque

- Une fois le parallélisme démontrer, on peut utiliser le théorème de Thalès pour calculer une longueur.

Chapitre 7

Sommaire

Notion de fonction

I. Définition et vocabulaire

Définition

Toute situation mathématique qui, à un nombre (de départ), associe **un seul** nombre (d'arrivée), peut être écrit avec un modèle mathématique que l'on appelle **une fonction**

Exemple

On considère le programme de calcul suivant

- Choisir un nombre
- Ajouter 5
- Elever au carré.

Pour un nombre choisi au départ, le résultat du programme est un nombre unique

Ce programme de calcul peut être modélisé par une fonction.

Une fonction est généralement notée par une lettre.
On note de la façon suivante cette fonction.

$$f : x \longmapsto (x + 5)^2$$

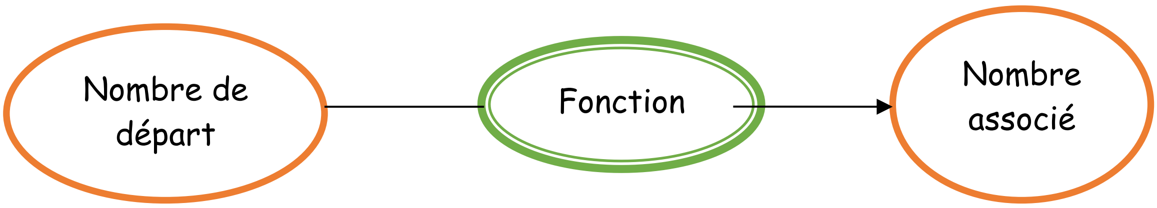
Dire "f est la fonction qui à x associe $(x + 5)^2$ »

Notation

La fonction f associe au nombre x (variable) un nombre unique noté $f(x)$ (lire « f de x »).

On note $f : x \longmapsto f(x)$

Pour l'exemple précédent $f(x) = (x + 5)^2$



Vocabulaire

On considère une fonction f.

Soit **a** un nombre et **b** le nombre qui lui est associé par la fonction f.

On dit que le nombre **b** est **l'image** du nombre **a** par la fonction f.

On dit aussi que le nombre **a** est **un antécédent** du nombre **b** par la fonction f.

Exemple

On considère la fonction h définie par $h : x \longmapsto x^2 - 1$.

$$h(3) = 3^2 - 1 = 8$$

Donc l'image du nombre 3 par la fonction h est 8.

Le nombre 3 est un antécédent de 8 par la fonction h.

Remarque :

Un nombre image peut avoir plusieurs antécédents

Par la fonction h, le nombre 8 a deux antécédents : 3, comme vu précédemment et $-\mathbf{3}$.
En effet, h($-\mathbf{3}$)= = ($-\mathbf{3}$)^2 – 1 = 8

Résumé

Soit f une fonction.

Au nombre x on associe le nombre $f(x)$

On note : $f : x \longmapsto f(x)$

$f(x)$ est l'image du nombre x.

x est un antécédent du nombre y signifie que $y = f(x)$.

II. Définition d'une fonction avec une représentation graphique

Une fonction peut être définie par un graphique dans un repère du plan.

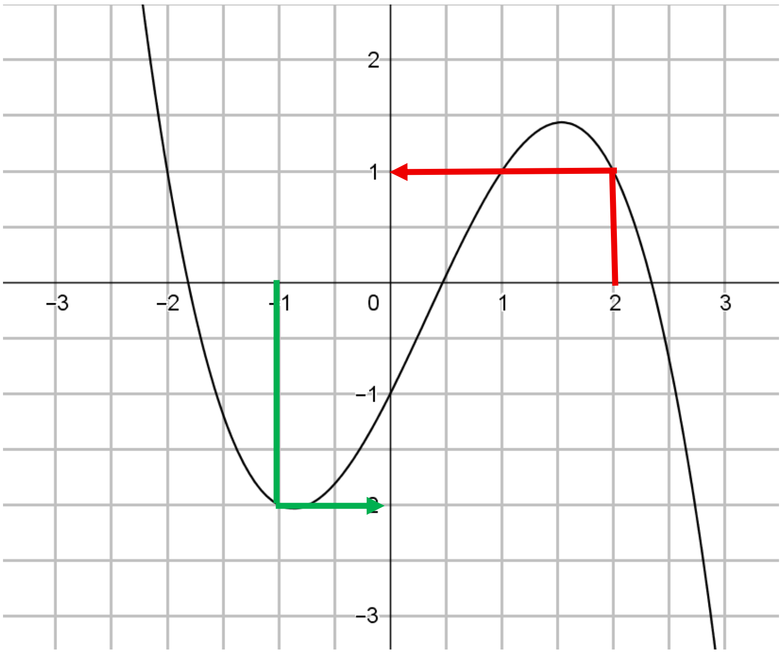
Définition

La représentation graphique d'une fonction f dans un repère est la courbe constituée de l'ensemble des points de coordonnées $(x\,;f(x))$

Sur l'axe des abscisses (horizontal) on lit **les antécédents** $(Antécédents\ de\ \mathrm{y}\ ;\ y)$

Sur l'axe des ordonnées (vertical) on lit **les images** $(x\ ;\ Image\ de\ x = f(x))$

Lecture de l'image d'un nombre



Lire graphiquement l'image de 2 par f.

Sur le graphique précédent, l'image de 2 par lecture graphique est 1.

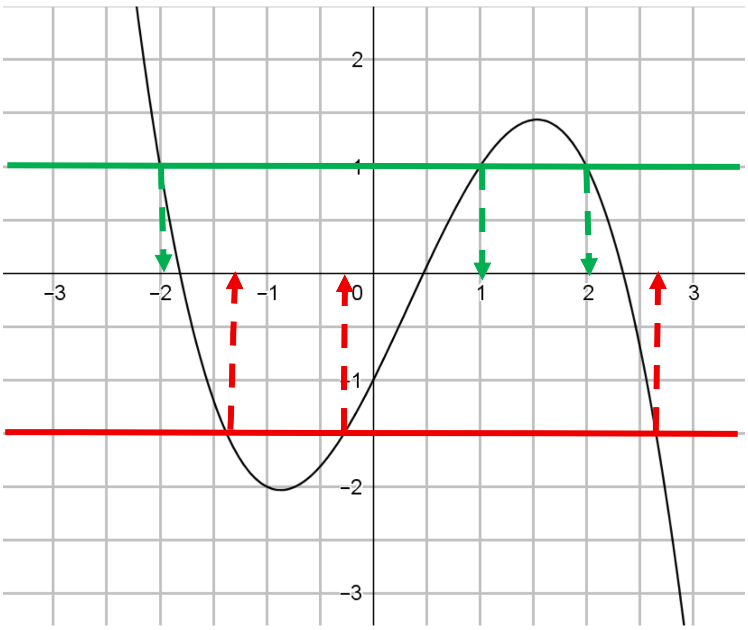
$f(2) = 1$.

Lire graphiquement l'image de -1 par f.

Par lecture graphique, l'image de -1 est environ -2.

$f(-1) \cong -2$

Lecture des antécédents d'un nombre :



Rechercher graphiquement les antécédents de 1.

Pour les antécédents de 1, on trace la droite horizontale passant par $(0\,;1)$.

Les antécédents de 1 sont : -2 ; 1 et 2.

Rechercher graphiquement les antécédents de $-\mathbf{1,5}$.

Pour les antécédents de $-$ 1,5, on trace la droite horizontales passant par $(0\ ;\ -1{,}5)$

Les antécédents de $-$ 1,5 sont :environ $-1{,}3$, environ $-0{,}3$ et environ 2,7.

III. Définir une fonction avec un tableau.

Une fonction peut être définie par **un tableau de valeurs**.

Exemple.

Le tableau suivant définit une fonction f qui à chaque nombre de la première ligne associe le nombre correspondant de la deuxième ligne.

Antécédent : x	0	1	2	3	4
Image : $g(x)$	3	5	3	1	– 5

L'image de 1 par g est 5 : $g(1) = 5$

Les antécédents de 3 par g sont 0 et 2. $3 = g(0) = g(2)$

IV. Avec une expression algébrique littérale.

Une fonction peut être définie par **une expression algébrique** dans laquelle figure la variable muette.

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4x + 7$.

Calcul de l'image d'un nombre

Pour calculer l'image d'un nombre, on substitue x par la valeur numérique dans l'expression et on effectue le calcul.

Calculer l'image de 5 par la fonction f.

$f(5) = 4 \times 5 + 7$

$f(5) = 27$

L'image de 5 par la fonction f est 27.

Calcul des antécédents d'un nombre

Pour trouver un antécédent d'un nombre y, il faut résoudre l'équation : $f(x) = y$.

Calculer le ou les antécédents de 28 par la fonction f.

x est la solution de l'équation $f(x) = 28$

Soit $4x + 7 = 28$

$4x = 28 - 7$

$4x = 21$

$x = \frac{21}{4} = 5{,}25$

L'antécédent de 28 par f est 5,25.

V. Synthèse

Soit f la fonction définie par $f : x \longmapsto x^2 - 2$

Tableau de valeurs

On peut remplir le tableau de valeurs suivant en utilisant une feuille de calcul dans un tableur.

B2 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	**x**	**-2**	**-1,5**	**-1**	**-0,5**	**0**	**0,5**	**1**	**1,5**	**2**	**2,5**	**3**
2	**f(x)**											
3												

A l'aide de la formule algébrique de la fonction, on écrit une formule dans la cellule B2 pour calculer l'image de 2 par f. On commence en tapant « = ».

Dans la cellule B2, on peut saisir : $\boldsymbol{= B1 * B1 - 2}$ ou $\boldsymbol{= B1\verb|^|2 - 2}$.

Puis, on étend la formule aux autres cellules.

On obtient le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$	2	0,25	-1	$-1{,}75$	-2	$-1{,}75$	-1	0,25	2	4,25	7

Représentation graphique

Pour tracer la représentation graphique de la fonction f, on trace tout d'abord un repère sur une feuille de papier millimétré.

Sur l'axe des abscisses, on prendra 2 cm pour une unité.

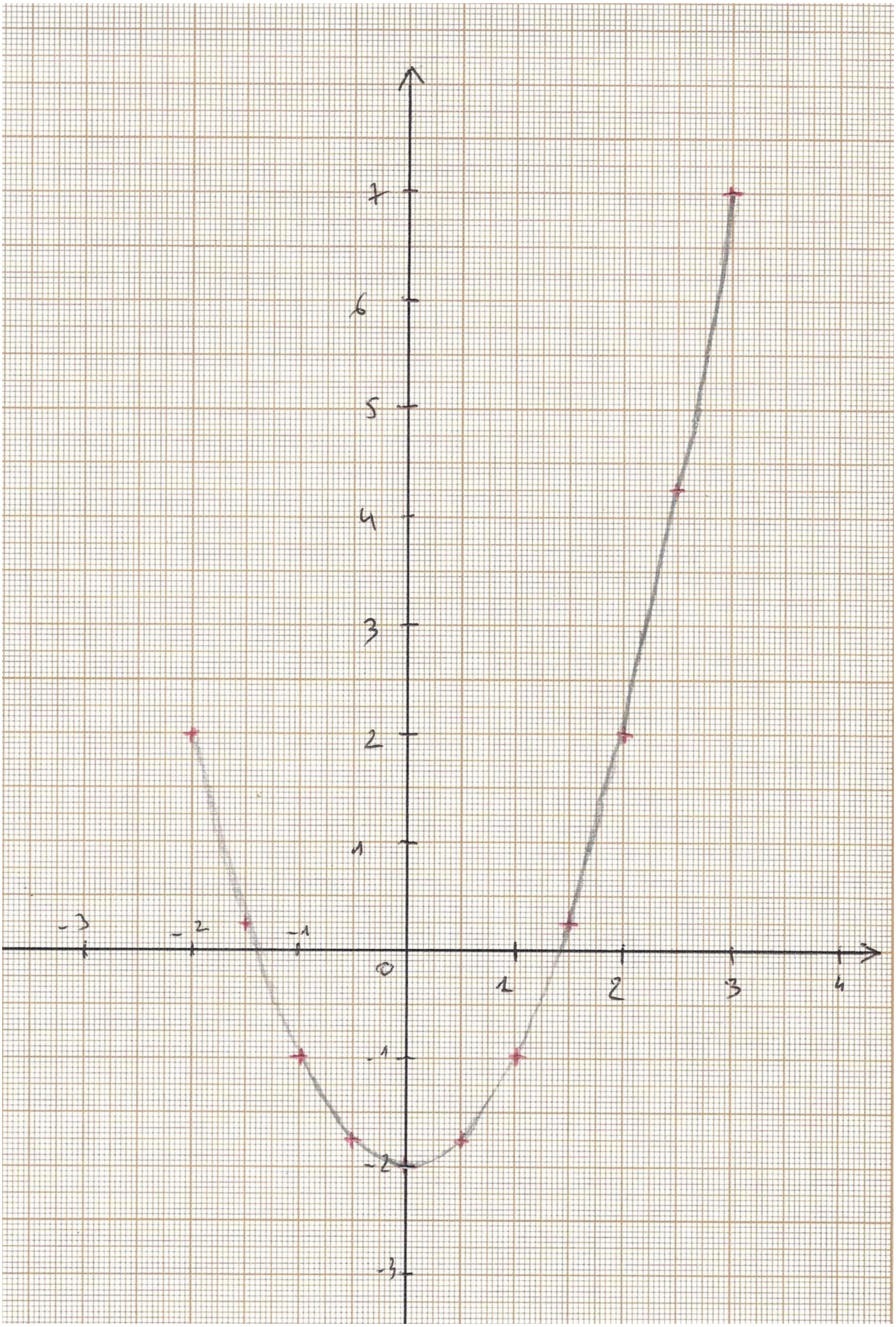
Sur l'axe des ordonnées, on prendra 2 cm pour une unité.

Puis, on place chaque point à l'aide du tableau de valeurs précédent.

On place ainsi le point de coordonnées $(-2\,;2)$.

Et ainsi de suite.

Enfin, à main levée dans ce cas, on relie les points afin d'obtenir la courbe représentative de la fonction f que l'on nommera C_f.
Et tracer la représentation graphique de la fonction f point par point.


7
6
5
4
3
2
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-1
-2
-3

Chapitre 8

Sommaire

Statistiques

I. Vocabulaire statistique

Définition

• Une étude statistique porte sur **une population**, que l'on appelle aussi **population statistique.**

• Le nombre d'individus de cette population s'appelle **l'effectif total.**

• L'ensemble des données statistiques que l'on étudie est **le caractère**, que l'on appelle aussi **caractère statistique.** Un caractère peut être **quantitatif** ou **qualitatif.**

• Une série statistique est **un tableau** avec :

- en première ligne**, les valeurs** du caractère statistique étudié

- en deuxième ligne, **l'effectif de la valeur.**

Exemple :

On étudie la répartition des salaires mensuels d'une petite start-up (spécialisée dans la conception de jeux vidéo) de 15 personnes (il faut du monde : des programmeurs, des dessinateurs, des designers du son…) :

2000 2200 2200 2100 2500 2000 2500 2000 3000 2200 2100
2000 2100 2000 2100

• La population étudiée : il s'agit des 15 personnes salariées de l'entreprise.

• L'effectif total est 15.

• Le caractère étudié est le salaire mensuel.

• La série statistique de l'étude ci-contre :

Salaire mensuel (en €)	2 000	2 100	2 200	2 500	3 000	Total
Effectif	5	4	3	2	1	15

II. Fréquence

Définition : fréquence

La fréquence d'une donnée est le quotient de son effectif par l'effectif total :

$$\text{Fréquence} = \frac{\text{effectif de la donnée}}{\text{effectif total}}$$

Remarques :

- Une fréquence peut être donnée sous forme de fraction, de nombre décimal ou de pourcentage
- Une fréquence est un nombre compris entre 0 et 1.
- La somme de toutes les fréquences est égale à 1

Exemple :

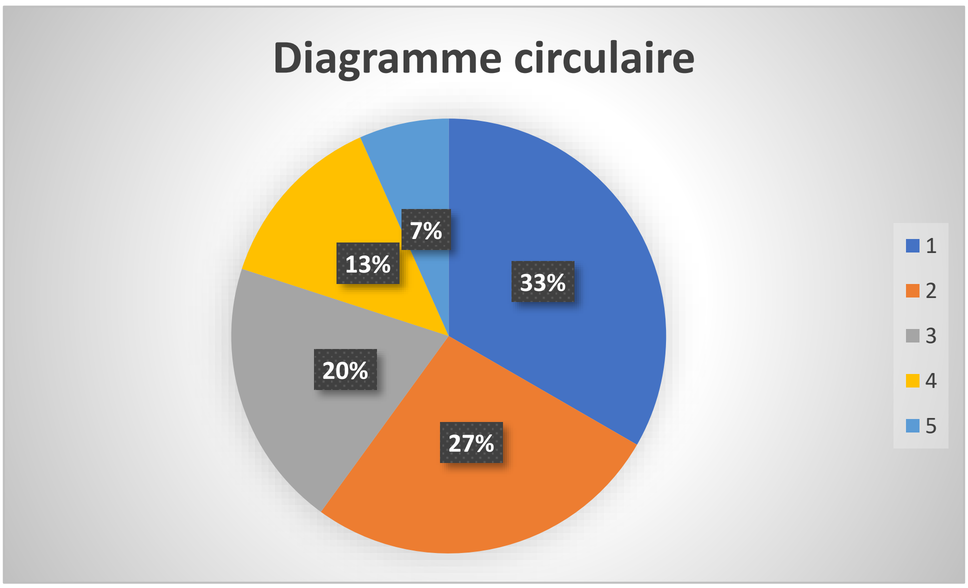
Calcul de la **fréquence** du salaire 2200€ :
$f = \frac{3}{15}$ soit $f = 0,2$ donc $f = 20\%$

Cela signifie que dans l'entreprise, 20% des salariés touchent 2200€ par mois.

Salaire mensuel (en €)	2 000	2 100	2 200	2 500	3 000	Total
Effectif	5	4	3	2	1	15
Fréquence en %.	33,33	26,67	20	13,33	6,67	100
Angle au centre associé en °.	120°	96°	72°	48	24	360

Calcul de l'angle au centre associé :

$$\frac{5}{15} \times 360 = 120°$$



III. Calculs de moyennes

a) Moyenne simple

Définition

La moyenne simple d'une série de données est égale au quotient de la somme de ces données par l'effectif total :

$$\text{Moyenne} = \frac{\text{somme des données}}{\text{effectif total}}$$

Remarque :

• La moyenne d'une série de données n'est pas forcément égale à l'une des données.

• La moyenne est toujours comprise entre la plus petite et la plus grande valeur de la série.

Exemple :

Calcul de la **« moyenne simple »** m des salaires mensuels :

$$m = \frac{2000+2200+2200+2100+2500+2000+2500+2000+3000+2200+2100+2000+2100+2000+2100}{15}$$

$m = \frac{33\,000}{15} = 2\,200$

Le salaire moyen dans cette start-up est de 2 200 € par mois.

b) Moyenne pondérée

Définition : moyenne pondérée

La moyenne pondérée d'une série de données est égale à la somme des produits de chaque valeur par son effectif divisée par l'effectif total :

$$\text{Moyenne pondérée} = \frac{\text{somme des produits des valeurs par leurs effectifs}}{\text{effectif total}}$$

Exemple :

Calcul de la **moyenne pondérée** M des salaires mensuels :

$M = \frac{5\times 2000+4\times 2\,100+3\times 2\,200+2\times 2\,500+1\times 3\,000}{5+4+3+2+1} = 2\,200$

Le salaire moyen dans cette entreprise est de 2200€ par mois.

c) Moyenne d'une série regroupée en classes

Méthode 1

Pour calculer la moyenne d'une série de données dont les valeurs sont regroupées en classes :

- On calcule le centre de chaque classe en faisant la moyenne des valeurs extrêmes de la classe ;
- On calcule la moyenne de la série en prenant comme valeurs les centres des classes

Exemple :

On demande à des élèves de 5è combien de SMS ils envoient par jour.

On regroupe les données dans le tableau d'effectif suivant :

Nombre *n* de SMS	$0 \leq n < 30$	$30 \leq n < 60$	$60 \leq n < 90$	$90 \leq n < 120$	$120 \leq n < 150$
Effectif	2	6	10	5	1

Ici, on a regroupé les données en classes d'amplitude 30.

Le centre de la première classe est : $\frac{0 + 30}{2} = 15$

Le centre de la deuxième classe est : $\frac{30 + 60}{2} = 45$ ... etc.

On a donc $M = \frac{15 \times 2 + 45 \times 6 + 75 \times 10 + 105 \times 5 + 135 \times 1}{2+6+10+5+1} = \frac{1710}{24} = 71{,}25$

Le nombre moyen de SMS envoyé chaque jour par des élèves de 5è est de 71, 25.

IV. Médiane et étendue d'une série statistique

a) Médiane

Définition : Médiane

La médiane notée M d'une série statistique dont les valeurs sont ordonnées (de la plus petite à la plus grande ou de la plus grande à la plus petite) est un nombre (pas forcément dans la série) qui partage cette série en deux groupes de même effectif, de telle sorte que :

- Au moins la moitié des valeurs de la série sont inférieures ou égales à M
- Au moins la moitié des valeurs de la série sont supérieures ou égales à M .

Exemple :

On range dans l'ordre croissant la série statistique que nous avons étudiée précédemment :

$$\underbrace{2000\ 2000\ 2000\ 2000\ 2000\ 2100\ 2100}_{\textbf{7 valeurs}}\ \ 2100\ \ \underbrace{2100\ 2200\ 2200\ 2200\ 2500\ 2500\ 3000}_{\textbf{7 valeurs}}$$

Médiane

Méthode :

Pour trouver la médiane d'une série statistique :

1) On range les valeurs de la série dans l'ordre (croissant ou décroissant)
2) On cherche la valeur centrale qui partage la série en deux séries de même effectif
3) Si la série a un effectif impair la médiane est une valeur de la série

Si la série a un effectif pair la médiane est la moyenne des deux « valeurs centrales »

Remarque :

La médiane ne dépend pas des valeurs extrêmes de la série.

b) Etendue

Définition : étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs de la série.

Remarque :

L'étendue est une mesure de dispersion des valeurs : plus l'étendue est grande, plus les valeurs sont dispersées. Cela donne quelques indications sur la série statistique étudiée.

Exemple :

L'étendue E de la série statistique étudiée est : $E = 3000 - 2000$ soit $E = 1000$.

Chapitre 9

Sommaire

Les nombres premiers

I. Nombres premiers

Définition

On dit qu'un nombre entier est **un nombre premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple

$13 = 1 \times 13$.
13 n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même. 13 est un nombre premier.

6 n'est pas un nombre premier, car il est divisible par 1 ; 2 ; 3 et 6.

Le début de la liste des nombres premiers est : 2 ; 3 ; 5 ; 7 …
1 n'est pas un nombre premier.

Crible d'Eratosthène

II. Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème (admis)

Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers.

Exemple

$10 = 2 \times 5$ $\quad$ $18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$ $\quad$ $46 = 2 \times 23$

Méthode

$105 = 3 \times 35$

$105 = 3 \times 5 \times 7$

$12\,250 = 2 \times 6\,125$

$12\,250 = 2 \times 5 \times 1\,225$

$12\,250 = 2 \times 5 \times 5 \times 245$

$12\,250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 49$

$12\,250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7$

$12\,250 = 2 \times 5^3 \times 7^2$

III. Fraction irréductibles

Définition

Une fraction est **irréductible** lorsqu'elle n'est plus simplifiable.

Rendre une fraction irréductible

Énoncé

Rendre la fraction $\frac{280}{448}$ irréductible.

Correction

On commence par décomposer 280 et 448 en facteurs premiers.

$280 = 2^3 \times 5 \times 7$ et $448 = 2^6 \times 7$

$$\frac{280}{448} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7}$$

$$\frac{280}{448} = \frac{5}{2 \times 2 \times 2}$$

$$\frac{280}{448} = \frac{5}{8}$$

Remarques

La fraction a été simplifiée par le plus grand diviseur commun de 280 et 448 : $2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

Lorsqu'une fraction est irréductible, le numérateur et le dénominateur ont un seul diviseur commun : 1.

IV. Plus petit multiple commun

1/méthode

Recherche du plus petit multiple commun de 18 et 28

$18 = 2 \times 3 \times 3$ et $28 = 2 \times 2 \times 7$

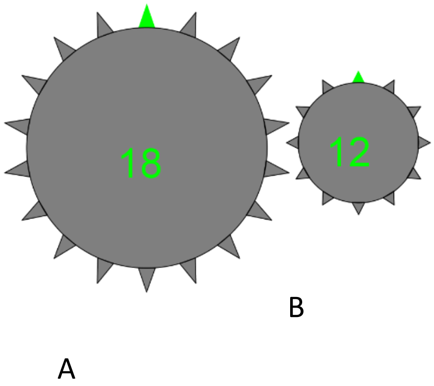
Le plus petit multiple commun de 28 et 36 est :

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 =$$

Permet de résoudre des exercices type engrenages, coïncidence et de conjonction de phénomènes.

2/ Application

Deux roues d'engrenage A et B sont en contact.
La roue A possède 18 dents et la roue B comporte 12 dents.
Au bout de combien de tours de chacune de ces roues seront-elles de nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?



La roue A fera un tour à chaque multiple de **18** dents, la seconde à chaque multiple de **12** dents.
Elles reviendront en position initiale à chaque multiple commun de **18** et de **12**.
Pour trouver le nombre de dents avant de revenir pour la première fois en position initiale, on cherche le plus petit multiple commun de 18 et 12.

Le nombre total de dents cherché est le plus petit multiple commun de 12 et 18.

$12 = 2 \times 2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3 \times 3$ donc le plus petit multiple commun de 12 et 18 est :

$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$.

Comme :

$36 = 18 \times 2$ et $36 = 12 \times 3$

alors, les deux roues reviennent dans leur position initiale pour la première fois quand la roue A fait 2 tours et la roue B fait 3 tours.

IV. Plus grand diviseur commun de deux nombres.

a) Méthode

Recherche du plus grand diviseur commun de 24 et 36.

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ et $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ donc le plus grand diviseur commun de 24 et 36 est : $2 \times 2 \times 3 = 12$.

b) Application

Un fleuriste dispose de 170 iris et de 102 roses.
Il veut, en utilisant toutes ses fleurs, réaliser un maximum de bouquets contenant tous le même nombre d'iris et le même nombre de roses.

0) Peut-il faire 10 bouquets ?

a) Quel est le nombre maximal de bouquets ?

b) Quel est le nombre d'iris dans chaque bouquet ?
Quel est le nombre de roses dans chaque bouquet ?

0) Le nombre de bouquet doit être un diviseur commun de 170 et 102. Or,170 est divisible par 10 mais pas 102. Donc, Il ne peut pas faire 10 bouquets.

a) Le nombre maximal de bouquet est le plus grand diviseur commun de 170 et 102

$170 = 2 \times 5 \times 17$ et $102 = 2 \times 3 \times 17$

Donc, le plus grand diviseur commun de 170 et 102 est : $2 \times 17 = 34$

Par conséquent, le fleuriste peut faire au maximum 34 bouquets.

b) $170 = 5 \times 34$ et $102 = 3 \times 34$.

Donc dans chaque bouquet, il y a 5 iris et 3 roses.

Chapitre 10

Sommaire

Calcul littéral - Développement

a/ Définition et méthode

Développer un produit, c'est le transformer sous la forme d'une somme algébrique.

Propriété de la distributivité

On considère les nombres relatifs a, b et k, on a

$k(a+b) = ka + kb$ $\qquad$ $k(a-b) = ka - kb$

Exemples

$A = 2(3x + 4)$
$A = 2 \times 3x + 2 \times 4$
$A = 6x + 8$

$B = 5x(2x - 3)$
$B = 5x \times 2x - 5x \times 3$
$B = 10x^2 - 15x$

« Double distributivité »

$C = (2x + 7)(3x + 9)$

$C = 2x \times 3x + 2x \times 9 + 7 \times 3x + 7 \times 9$

$C = 6x^2 + 18x + 21x + 63$

$\underline{C = 6x^2 + 39x + 63}$

$D = (4x - 3)(2x - 5)$

$D = 4x \times 2x - 4x \times 5 - 3 \times 2x + 3 \times 5$

$D = 8x^2 - 20x - 6x + 15$

$\underline{D = 8x^2 - 26x + 15}$

Cas particuliers

$E = (x + 4)^2$
$E = (x + 4)(x + 4)$
$E = x \times x + x \times 4 + 4 \times x + 4 \times 4$
$E = x^2 + 4x + 4x + 16$
$E = x^2 + 8x + 16$

$F = (3x - 5)^2$
$F = (3x - 5)(3x - 5)$
$F = 3x \times 3x - 3x \times 5 - 5 \times 3x + 5 \times 5$
$F = 9x^2 - 15x - 15x + 25$
$F = 9x^2 - 30x + 25$

b/ Une identité remarquable

Produit « somme ; différence »

a et b sont des nombres décimaux

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$$

$E = (x+7)(x-7)$

$E = x^2 - 7^2$

$\underline{E = x^2 - 49}$

$F = (x-11)(x+11)$

$F = x^2 - 11^2$

$\underline{F = x^2 - 121}$

$G = (8x-4)(8x+4)$

$G = (8x)^2 - 4^2$

$\underline{G = 64x^2 - 16}$

II. Opposé d'une somme algébrique

Propriété

L'opposé d'une somme algébrique est égal à la somme algébrique des opposés.

Exemple

$-(2x-3) = -2x+3$

$-(3x^2+2x-7) = -3x^2-2x-7$

Suppression des parenthèses.

Dans une suite d'additions et de soustractions, on peut supprimer les parenthèses et le signe qui les précède :

- en écrivant les opposés des termes situés dans les parenthèses si elles sont précédées d'un signe - ;
- sans changer les nombres situés dans les parenthèses si elles sont précédées du signe +.

Exemple

$H = 3x + (-5x+3)$

$H = 3x - 5x + 3$

$\underline{H = -2x+3}$

$I = (3x-8) - (x-5)$

$I = 3x - 8 - x + 5$

$\underline{I = 2x-3}$

$J = -(-3x-4) + (8x-2)$

$J = 3x + 4 + 8x - 2$

$\underline{J = 11x+2}$

$K = 3x(x-2) - (x+3)(x-3)$

$K = (3x \times x - 3x \times 2) - (x^2 - 3^2)$

$K = (3x^2 - 6x) - (x^2 - 9)$

$K = 3x^2 - 6x - x^2 + 9$

$\underline{K = 2x^2 - 6x + 9}$

Sommaire

Chapitre 11

Fonction linéaire

I. Fonction linéaire

1) Proportionnalité et fonction linéaire

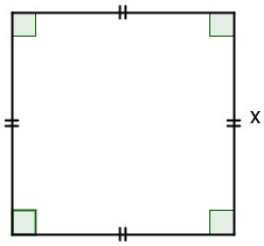
Deux grandeurs sont proportionnelles lorsque les valeurs de l'une s'obtiennent en **multipliant** les valeurs de l'autre **par un même nombre non nul.**

Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

Chaque situation de proportionnalité peut être **modélisé** par **une fonction** f définie par :

$\boldsymbol{f : x \longmapsto ax}$ où a est le coefficient de proportionnalité.

Exemple :



On considère le carré de côté x ci-contre.

Le périmètre du carré est proportionnel à la longueur de son côté et le coefficient de proportionnalité est 4 :

Longueur du côté (en cm)	2	6	9
Périmètre (en cm)	8	24	36

La fonction P qui modélise cette situation de proportionnalité est définie par :

$P(x)=4x$ ou $P : x \longmapsto 4x$

2) Définition

Etant donné un nombre $\boldsymbol{a}$, la fonction $\boldsymbol{f}$ qui à tout nombre $\boldsymbol{x}$ fait correspondre **le produit de $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{a}$,** est une **fonction linéaire de coefficient $\boldsymbol{a}$** et on note : $\boldsymbol{f(x) = a\,x.}$

Le nombre $\boldsymbol{a}$ est appelé **le coefficient de linéarité** de la fonction linéaire.

Exemple 1 :

$f(x)=3x$ est la fonction linéaire de coefficient 3.

x	-5	0	1	2
$f(x)$	-15	0	3	6

$\times 3$

Exemple 2 :

$f(x)=-2x$ est la fonction linéaire de coefficient -2.

x	-5	0	1	2
$f(x)$	-10	0	-2	-4

$\times -2$

Ces deux tableaux de valeurs sont des tableaux de proportionnalité.

Sommaire

II. Ce qu'il faut savoir faire

1/ Calculer une image avec une fonction linéaire.

Soit *f* la fonction linéaire de coefficient de linéarité – 4,5.

$f : x \longmapsto -4{,}5x$ ou $f\ (x)\ =\ -4{,}5x$.

Calculer l'image de 9 par f puis celle de -6 par f.

On multiplie par le coefficient de la fonction linéaire

Calcul de l'image de 9, par la fonction f.
On remplace x par 9 et on effectue le calcul.
$f(9)\ =\ -4{,}5\ \times\ 9\ =\ -40{,}5$
Calcul de l'image de -6, par la fonction f.
$f(-6)\ =\ -4{,}5\ \times\ (-6)\ =\ 27.$

2/ Calculer les antécédents par une fonction linéaire.

Soit *g* la fonction linéaire définie par $g(x)\ =\ 5x$.

Calculer les antécédents de – 36 par la fonction g.

On divise par le coefficient de la fonction linéaire

On cherche les nombres x tels que : $g(x)\ =\ -36.$
Ce sont les nombres qui sont les solutions de l'équation :
$5x\ =\ -36$
$x = \dfrac{-36}{5}$
$x = -7{,}2.$
L'antécédent de – 36 par la fonction g est – 7,2.

3/ Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire.

Soit *h* la fonction linéaire telle que *h*(8) = – 5,6.

Déterminer l'expression algébrique de la fonction linéaire *h*.

h est une fonction linéaire donc il existe un nombre a tel que $h(x)\ =\ ax.$
Comme $h(8)\ =\ -5{,}6$ alors $a\ \times\ 8\ =\ -5{,}6.$
Donc $a\ =\ \frac{-5{,}6}{8}\ =\ -0{,}7.$
Par conséquent, $h(x)\ =\ -0{,}7x.$

III. Représentation graphique

Sommaire

Définition :

Dans un repère, la représentation graphique de la fonction linéaire $x : \longmapsto ax$ est une **droite passant par l'origine du repère**.

Inversement, dans un repère, toute droite non verticale passant par l'origine est la représentation graphique d'une fonction linéaire $f : x \longmapsto ax$.

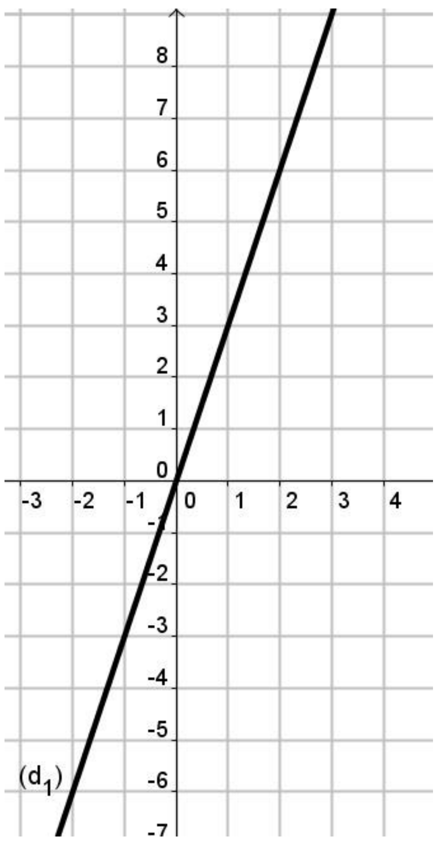
On dit que cette droite a pour **équation** l'égalité $y = ax$ et a est appelé **le coefficient directeur ou la pente** de la droite.

Exemples :

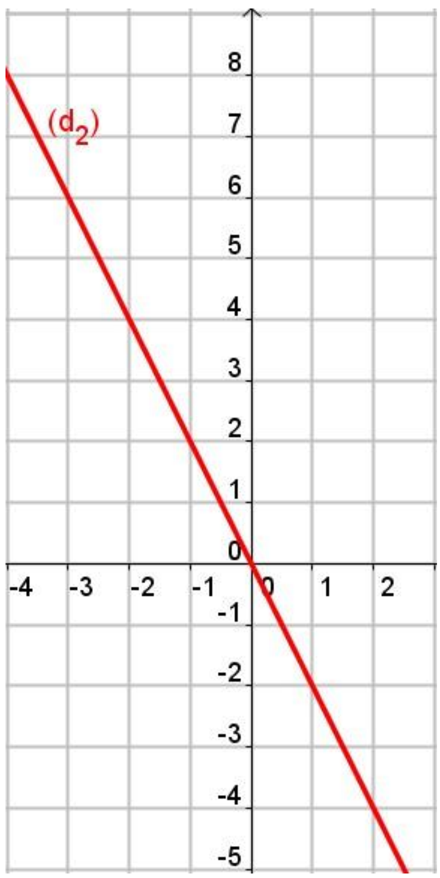
On reprend les exemples 1 et 2.

On appellera (d_1) la droite représentant la fonction linéaire $f(x) = 3x$ et (d_2) la droite représentant la fonction linéaire $f(x) = -2x$.

Exemple 1 : cas où $a > 0$



Exemple 2 : cas où $a < 0$



Tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire.

Soit t la fonction linéaire tel que $r : x \longmapsto -0.5x$.

Construire et tracer sa représentation graphique.

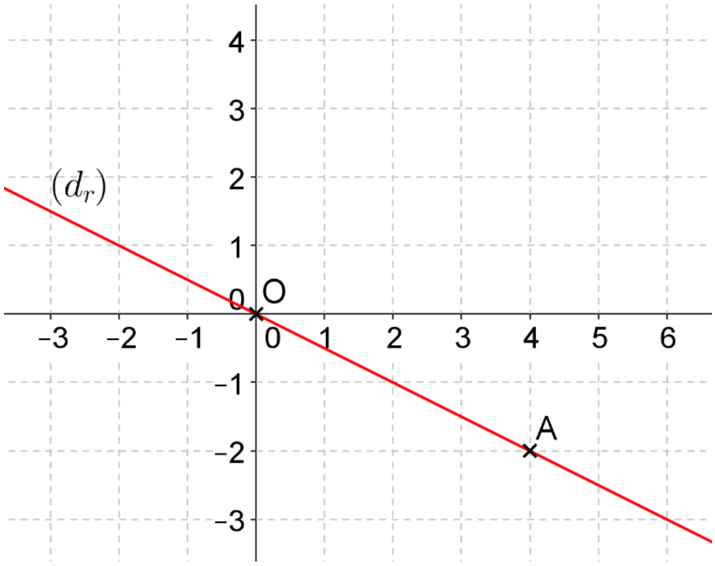
On calcule l'image d'un nombre bien choisi.

$r(4) = -0{,}5 \times (4) = -2$

x	4
$rt(x)$	$-0{,}5 \times (-4) = -2$

La représentation graphique de la fonction linéaire r est la droite (d_r) passant par l'origine du repère, $O(0\ ;\ 0)$ et par le point $A(4\ ;-2)$.

La pente de la droite(d_r) est $-0{,}5 < 0$ donc la droite « descend » elle est décroissante.



Soit t la fonction linéaire tel que $t : x \longmapsto \frac{4}{3}x$.

Construire et tracer sa représentation graphique.

On calcule l'image d'un nombre bien choisi.

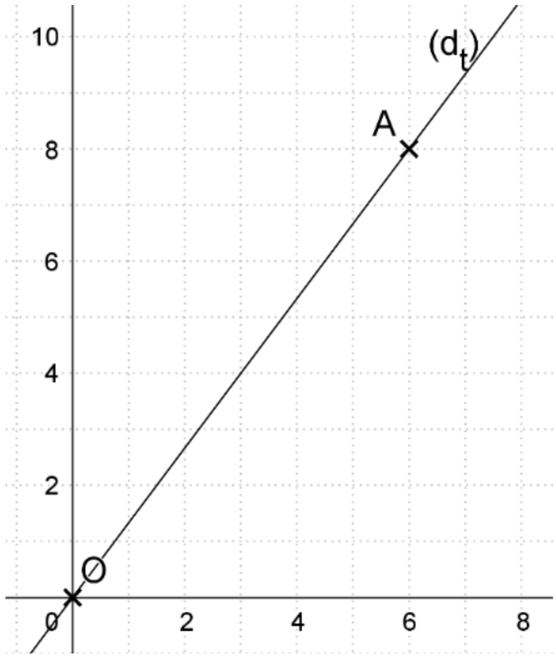
$t(6) = \frac{4}{3} \times 6 = 8$

x	6
t(x)	$\frac{4}{3} \times 6 = 8$

La représentation graphique de la fonction linéaire t est la droite (d_t) passant par l'origine du repère,

O(0 ; 0) et par le point $A(6\ ;\ 8)$.

La pente de la droite(d_t) est $\frac{4}{3} > 0$ donc la droite « monte » elle est croissante.



IV. Fonction linéaire et pourcentage.

Sommaire

Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.

Exemple

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120 €, c'est faire l'opération suivantes :

$\frac{3}{5} \times 120 = 72$ €

Remarque

Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100.

$$p\ \% = \frac{p}{100}$$

Prendre un pourcentage d'une quantité, c'est multiplier la quantité par $\frac{p}{100}$

Exemple

Dans une classe, 25 % des 28 élèves sont malades. Combien d'élèves sont malades ?

$$\frac{25}{100} \times 28 = 7$$

7 élèves sont malades.

Propriété

Prendre ou calculer p % d'une quantité, peut être modéliser par la fonction linéaire

$$x \longmapsto \frac{p}{100}x$$

Exemple

Les articles d'un magasin d'habillement ont augmenté de 7 %.

Si on appelle x le prix de chaque produit, l'augmentation est modélisée par la fonction linéaire f définie par

$$f(x) = \frac{7}{100}x = 0{,}07x.$$

Deux produits coutent respectivement 52 € et 90 €.

Pour calculer l'augmentation de ces produits, on calcule $f(52)$ et $f(90)$.

$$f(52) = 0{,}07 \times 52 = 3{,}64\ €$$

$$f(90) = 0{,}07 \times 90 = 6{,}30\ €$$

Attention, ce ne sont pas les nouveaux prix de ces articles.

Propriété

Augmenter une quantité de p % revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$

Réduire une quantité de p % revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$

Démonstration

Soit Q la quantité.

p % de Q c'est $\frac{p}{100} \times Q$

Pour une augmentation de p %, la nouvelle quantité est donc :

$$Q + \frac{p}{100} \times Q = 1 \times Q + \frac{p}{100} \times Q = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times Q$$

Pour une réduction de p %, la nouvelle quantité est donnée par :

$$Q - \frac{p}{100} \times Q = 1 \times Q - \frac{p}{100} \times Q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \times Q$$

Remarque

Les deux situations sont modélisées par les fonctions linéaires :

Pour une augmentation de p %:

$$x \longmapsto \left(1 + \frac{p}{100}\right) x$$

Pour une réduction de p % :

$$x \longmapsto \left(1 - \frac{p}{100}\right) x$$

Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15%.
Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?

Calculons le prix soldé.

$$\left(1 - \frac{15}{100}\right) \times 74 = 0{,}85 \times 74 = 62{,}90$$

Le prix soldé est 62,90€.

Exemple 2

Le taux de TVA est de 20 %.
a. Donner l'expression algébrique de la fonction f qui donne le prix TTC en fonction du prix HT x.
b. Le prix HT est de 55 €. Quel est le prix TTC ?
c. Le prix TTC est de 150 €. Quel est le prix HT ?

a. $f(x) = \left(1 + \frac{20}{100}\right)x = 1{,}2x$
b. Calculons le prix TTC.
Cela revient à calculer l'image de 126 par f.

$$f(126) = 1{,}2 \times 55 = 66$$

Le prix TTC est de 66 €.
c. Calculons le prix HT.
Cela revient à calculer l'antécédent de 150 par f.
On cherche x tel que :

$$1{,}2x = 150$$
$$x = \frac{150}{1{,}2}$$
$$x = 125$$

Le prix HT est de 125 € €.

Propriétés :

Action	... prendre $t\%$ de x	… augmenter x de de $t\%$	… diminuer x de de $t\%$
Fonction linéaire	$x \longmapsto \frac{t}{100} \times x.$	$x \longmapsto \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times x.$	$x \longmapsto \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times x.$

Exemples :

	Prendre 5 % de x, C'est multiplier x par 0,05	Augmenter x de 5 % C'est multiplier x par 1,05.	Diminuer x de 5 % C'est multiplier x par 0,95.
Expression littérale	$\frac{5}{100}x$ $= 0{,}05x$	$x + \frac{5}{100}x$ $=\left(1 + \frac{5}{100}\right) \times x$ $= 1{,}05x$	$x - \frac{5}{100}x$ $=\left(1 - \frac{5}{100}\right) \times x$ $= 0{,}95x$
Fonction linéaire	$x \longmapsto \frac{5}{100} \times x = 0{,}05\,x$	$x \longmapsto 1{,}05\,x$	$x \longmapsto 0{,}95\,x$

Application :

Un ouvrier travaille actuellement pour $1\ 300$€ *par mois. Son prochain salaire va être augmenté de* 5%.

Quel sera son nouveau salaire ?

- Augmenter de 5% revient à multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$

$$1\ 300 \times 1{,}05 = 1\ 365$$

Le nouveau salaire est de 1 365 €.

Remarque :

Une augmentation de $t\%$ suivi d'une diminution de $t\%$ ne ramène pas à la valeur initiale.

Cas particulier

- Augmenter de 50 % une quantité, revient à la multiplier par 1,5..
- Augmenter de 100 % une quantité, revient à la multiplier par 2
- Diminuer de 50 % une quantité, revient à la multiplier par 0,5 soit à la diviser par 2.