EG – Connaître et utiliser les triangles

- La racine carrée d'un nombre positif
- Le théorème de Pythagore
- La réciproque du théorème de Pythagore.

I. Carré et racine carrée.

a/ Elever au carré

Le carré d'un nombre relatif est le produit de ce nombre par lui-même.

Soit *a* un nombre relatif, le carré de *a* est $a \times a$. On le note a^2

Exemple :

$7^2 = 7 \times 7 = 49$;
$(-35)^2 = (-35) \times (-35) = 1225$ (dans ce cas, les parenthèses sont obligatoires, car $-35^2 = -35 \times 35 = -1225$

Propriétés

• Le carré d'un nombre quelconque est toujours positif.

En effet le carré d'un nombre est le produit de deux facteurs de même signe.

Quel que soit le nombre relatif a,

$$\mathbf{a^2 \geq 0}.$$

Table de Pythagore : table des carrés des nombres entiers. (À savoir par cœur dans les deux sens.)

$1^2 = 1$	$6^2 = 36$	$11^2 = 121$
$2^2 = 4$	$7^2 = 49$	$12^2 = 144$
$3^2 = 9$	$8^2 = 64$	$13^2 = 169$
$4^2 = 16$	$9^2 = 81$	$14^2 = 196$
$5^2 = 25$	$10^2 = 100$	$15^2 = 225$

b/ Prendre la racine carrée d'un nombre positif.

Soit a un nombre positif (a $\geq$ 0)

La **racine carré** de a est le nombre **positif** dont **le carré** est a.

La racine carrée de a se note $\sqrt{\boldsymbol{a}}$**.**

D'après la définition, on a **:** $(\sqrt{\boldsymbol{a}})^{2} = \boldsymbol{a}$**.**

Exemples :

$\sqrt{144}$ = 12 car 12 est positif et 12^2 = 144.
$\sqrt{0}$ = 0 car 0^2 = 0.

Attention : $\sqrt{a}$ n'a pas de sens si a est un nombre négatif.

$\sqrt{-4}$ n'a pas de sens car − 4 est un nombre négatif. Il n'existe pas de nombre dont le carré soit − 4.

Définition : carré parfait

On appelle **« carré parfait »** un nombre entier positif dont la racine carrée est un nombre entier.

Exemples :

16 est un carré parfait car 16 = 4^2, et $\sqrt{16}$ = 4.

40 000 est un carré parfait car 40 000 = 200^2, et $\sqrt{40\ 000}$ = 200

Utilisation de la calculatrice

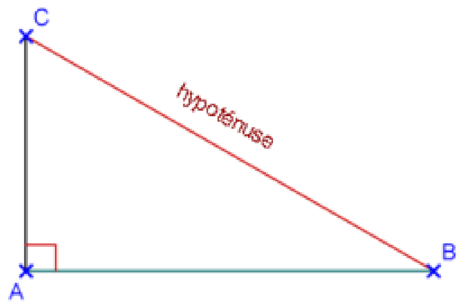
III. Connaître l'énoncé du théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore, on peut écrire l'égalité :

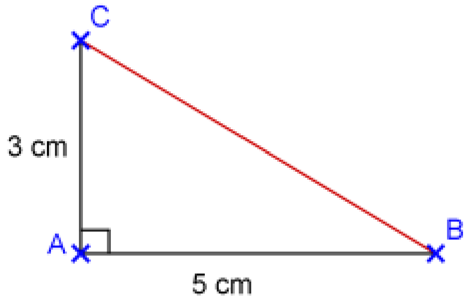
$BC^2 = AB^2 + AC^2$



IV. Savoir utiliser le théorème de Pythagore

a/ Calculer la longueur de l'hypoténuse

On donne le triangle ci-contre.
Calculer BC. En donner la valeur arrondie au mm.



ABC est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
Soit : $BC^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$
Donc $BC = \sqrt{34} \approx 5{,}83$ cm

Pour calculer BC on utilise la touche $\sqrt{\ }$ (« racine ») de la calculatrice.

Conséquences

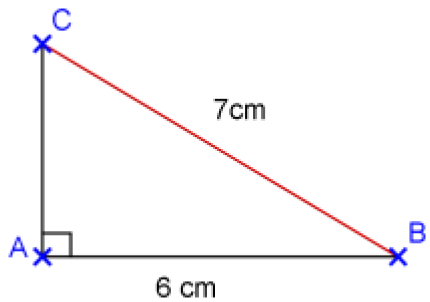
L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus grand côté du triangle.

b/ Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit :

Calculer AC. En donner la valeur arrondie au millimètre près.

ABC est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$
Soit : $7^2 = 6^2 + AC^2$
$49 = 36 + AC^2$
Donc $AC^2 = 49 - 36 = 13$
Par conséquent $AC = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ cm

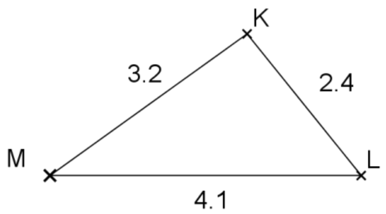


c/ Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Si le carré du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des deux côtés, alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemple

MKL est un triangle tel que : MK = 3,2 cm, KL = 2,4 cm et ML = 4,1 cm.
$ML^2 = 4,1^2 = 16,81$.
$MK^2 + KL^2 = 3,2^2 + 2,4^2 = 10,24 + 5,76 = 16$
$ML^2 \neq MK^2 + KL^2$.
Donc le triangle MKL n'est pas rectangle.



IV. Savoir reconnaître un triangle rectangle.

Réciproque du théorème de Pythagore

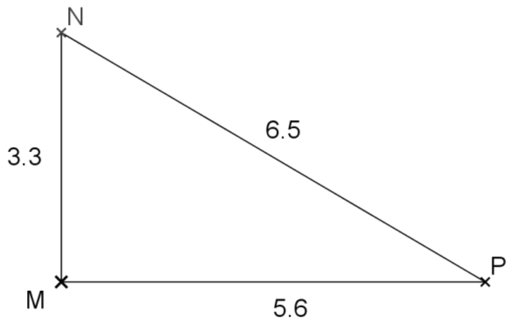
Si dans un triangle le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle.

Cette propriété permet de démontrer qu'un triangle est rectangle.

Exemple.

MNP est un triangle tel que MN = 3,3 cm ; NP = 6,5 cm et PM = 5,6 cm.

MNP est-il rectangle ?



Si MNP est rectangle alors l'hypoténuse est forcément [NP]

d'une part, $NP^2 = 6,5^2 = 42,25$

D'autre part, $MN^2 + PM^2 = 3,3^2 + 5,6^2 =$

$= 10,89 + 31,36$

$= 42,25$

Donc : $NP^2 = MN^2 + PM^2$

Le triangle MNP vérifie l'égalité de Pythagore donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle **MNP est un triangle rectangle en M.**